HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 3

Tehtäväsarja I

1. Mitkä seuraavista funktioista F_1, F_2, F_3 ja F_4 ovat kertymäfunktioita? Mitkä niistä ovat diskreetin jakauman kertymäfunktioita ja mitkä jatkuvan jakauman kertymäfunktioita? Laske diskreeteille jakaumille niiden pistetodennäköisyysfunktio ja jatkuville jakaumille niiden tiheysfunktio.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 1/2 & \text{kun } 0 \le x < 1/3, \\ 8/11 & \text{kun } 1/3 \le x < 5/7, \\ 1 & \text{kun } x \ge 5/7, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^2/4 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 4x^3 - 3x & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^4 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

2. Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = k \cdot h(x)$, jossa h on
$$h(x) = (2x-1)^{\alpha-1}, \quad \text{kun } \frac{1}{2} < x < 1,$$
ja h on nolla muualla. (a) Laske vakion k arvo, (b) johda jakauman kertymäfunktio, (c) johda jakauman kvantiilifunktio.

3. Olkoon X diskreetti sm, jonka ptnf f on $f(x) = \frac{1}{6}\mathbf{1}\{\, x \in \{-1,0,2,3\}\,\} + \frac{1}{3}\mathbf{1}\{\, x = 1\,\}$. Olkoon Z sm, joka määritellään $Z = X^2 - 2$. Määrää sm:n Z ptnf.

4. Olkoon $X > 0$ jatkuvasti jakautunut sm, jonka tf $f_X(x)$ on jatkuva ja aidosti positiivinen, kun $x > 0$ (ja $f_X(x) = 0$ muuten). Laske satunnaismuuttujien Y ja Z kertymäfunktiot, kun
$$Y = \frac{1}{\sqrt{X}}, \qquad Z = \frac{X-2}{X+1}.$$
Tarkista, että sekä Y:n että Z:n jakauma on jatkuva (joko sovella lausetta 2.7 tai tarkista lauseen 2.12 oletukset). Laske lopuksi Y:n ja Z:n tiheysfunktiot.

5. Olkoon $U \sim U(0,1)$ tasajakautunut sm. Etsi sellainen muunnos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että sm $X = g(U)$ on

   a) on jatkuvasti jakautunut ja tf on $f_X(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{1}\{\, 0 < x < 1\,\} + \mathbf{1}\{\, x \ge 1\,\}x^{-2})$ (vihje. kvantiilifunktio)

   b) on diskreetti ja ptnf on f_X on $f_X(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}\{\, x = -2016\,\} + \frac{3}{8}\mathbf{1}\{\, x \in \{2,4\}\,\}$ (vihje. g porrasfunktio, jonka voit etsiä suoraan tai määritelmän 2.9 ja lauseen 2.11 avulla)

6. Olkoon X jatkuvasti jakautunut sm, jonka tf on f_X on jatkuva (mahdollisesti lukuunottamatta äärellisen monta poikkeuskohtaa) ja $f_X(x) > 0$ kaikilla $x \in (-2,2)$. Olkoon $g(x) = x^2\mathbf{1}\{\, x < 0\,\} + (x^2+1)\mathbf{1}\{\, x \ge 0\,\}$. Määrää sm:n $Y = g(X)$ kf ja varmista, että Y on jatkuvasti jakautunut. Laske myös sen tiheysfunktio tapauksessa, kun $X \sim U(-2,2)$.