

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 2

Tehtäväsarja I

Tehtävät 2-6 perustuvat monisteen kappaleisiin 2.1–2.7

1. Heitetään noppaa kahdesti. Olkoon A tapahtuma ”jompi kumpi silmäluvuista on 1 tai 2” ja olkoon B tapahtuma ”jompi kumpi silmäluvuista on 5 tai 6”.

a) Näytä (suoraan laskemalla) määritelmän 1.4 avulla, että A ja B eivät ole riippumattomia.

b) Olkoon C tapahtuma ”ensimmäisellä heitolla saatiin 3,4 tai 5 ja toisella heitolla saatiin 2,3 tai 4”. Näytä (suoraan laskemalla) määritelmän 1.6 avulla, että A ja B ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla C .

2. Tarkastelemme kahden nopan heittoa. Olkoon X_1 ensimmäisen nopan silmäluku, ja X_2 toisen nopan silmäluku. Olkoon Y silmäluvuista pienempi, ts. $Y = \min(X_1, X_2)$. Johda satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktio.

3. Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + \frac{1}{3} & \text{kun } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Määritä vakion c arvo, ja johda kaava jakauman kertymäfunktioille.

4. Olkoon $X > 1$ (ts. $X(\omega) > 1$ kaikilla ω) satunnaismuuttuja, ja määritellään satunnaismuuttuja Y siten, että $Y = \log(2X - 2)$ (ts. $Y(\omega) = \log(2X(\omega) - 2)$ kaikilla ω). Ilmaise satunnaismuuttujan Y kertymäfunktio satunnaismuuttujan X kertymäfunktion avulla.

5. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sqrt{x}, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(\frac{1}{3} \leq X < \frac{5}{4})$.

6. Tarkista lauseen 2.7 avulla, että funktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -1 \\ \frac{1}{3}(x+1)^3 & \text{kun } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2}x)^2 & \text{kun } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$$

on jatkuvan jakauman kertymäfunktio. Laske jakauman tiheysfunktio sekä piirrä tiheysfunktion kuvaaja.