

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Tarkastellaan *normaalista* ARMA(p,q)-prosessia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$$

ja oletetaan stationaarisuus-, käännettävyys- ja identifioituvuusehdot.

- Merkitään $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ ja $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$.
- Koska $\mathbf{y} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma})$, jossa $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$, on sv:n \mathbf{y} tiheysfunktio

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-T/2} \det(\sigma^2 \boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \right\}.$$

- Tunnetusti, $\det(\sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}) = \sigma^{2T} \det(\boldsymbol{\Sigma})$, joten log-uskottavuusfunktio on

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log \det(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})^{-1} \mathbf{y}.$$

- Log-uskottavuus funktiossa

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log \det(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})^{-1} \mathbf{y}.$$

$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ on varsin monimutkainen funktio parametrusta $\boldsymbol{\beta}$, joten log-uskottavuusfunktiota ei voida esittää yksinkertaisessa muodossa.

- Käytännössä uskottavuusfunktio joudutaan maksimoimaan numeerisia menetelmiä käyttäen.
- Tämä vaatii käänteismatriisin $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})^{-1}$ ja determinantin $\det(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}))$ laskemisen, kun parametrin $\boldsymbol{\beta}$ arvo on annettu. Annetulla $\boldsymbol{\beta}$:n ja σ^2 :n arvoilla $\text{Cov}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ ja siten $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ voidaan laskea kuten jaksossa 3.3 kuvattiin.

- ARMA(p,q)-prosessin autokovarianssifunktio toteuttaa

$$\gamma_h = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{h-p} + \sigma^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h}, & 0 \leq h < \max\{p, q+1\} \\ \phi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{h-p}, & h \geq \max\{p, q+1\}, \end{cases}$$

jossa $\theta_0 = 1$ ja summaus $\sum_{j=h}^q$ tulkitaan nolllaksi, kun $h > q$.

- Koska kertoimet ψ_j voidaan lausua parametrien ϕ_1, \dots, ϕ_p ja $\theta_1, \dots, \theta_q$ funktiona, voidaan autokovarianssit γ_h , $h \geq 0$, ratkaista näistä yhtälöistä parametrien funktiona differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa käytettävien menetelmien avulla.

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Miten lasketaan $\Sigma(\boldsymbol{\beta})^{-1}$ ja $\det(\Sigma(\boldsymbol{\beta}))$ log-uskottavuusfunktiossa

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log \det(\Sigma(\boldsymbol{\beta})) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \Sigma(\boldsymbol{\beta})^{-1} \mathbf{y} ?$$

- Cholesky-hajotelma:

$$\Sigma = \mathbf{C}\mathbf{C}',$$

jossa $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ ($T \times T$) on alakolmiomatriisi eli $c_{ij} = 0$, $i < j$, ja lisäksi $c_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, T$.

- Kun $\boldsymbol{\beta}$:n arvo on annettu, voidaan \mathbf{C} , $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}')$ ja \mathbf{C}^{-1} ja muodostaa nykyisin helposti (\mathbf{C} :n alakolmiorakenne!).
- Siis,

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \mathbf{C}(\boldsymbol{\beta})'^{-1} \mathbf{C}(\boldsymbol{\beta})^{-1} \mathbf{y}.$$

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Merkitään $S(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}'\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta})'^{-1}\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta})^{-1}\mathbf{y}$, jolloin

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{2\sigma^2} S(\boldsymbol{\beta}).$$

- $l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ maksimoituu annetulla $\boldsymbol{\beta}$:n arvolla, kun $\sigma^2 = T^{-1}S(\boldsymbol{\beta})$, joten SU-estimaateille $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ja $\hat{\sigma}^2$ pätee

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1}S(\hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

- Lisäksi, $\boldsymbol{\beta}$:n SUE $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ saadaan maksimoimalla profiiliuskottavuusfunktio

$$l_p(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{T}{2} \log S(\boldsymbol{\beta}) - \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\boldsymbol{\beta}).$$

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Profiiliuskottavuusfunktion $l_p(\boldsymbol{\beta})$ maksimointi suoritetaan lähtemällä jostain alkuarvosta $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$ ja edeten iteratiivisesti arvoihin $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(2)}, \dots$, jotka (toivottavasti) konvergoivat SU-estimaattiin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.
- Yleinen iteraatiokaava on tyyppiä

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} + a^{(i)} \mathbf{d}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$\mathbf{d}^{(i)}$ on ns. suuntavektori ja $a^{(i)}$ (skalaari) on ns. askelpituus, jonka algoritmi valitsee siten, että ehto $l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}) \geq l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})$ toteutuu.

- Esimerkiksi tunnetussa Newton-Raphson menetelmässä

$$\mathbf{d}^{(i)} = - \left(\partial^2 l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}' \right)^{-1} \partial l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}) / \partial \boldsymbol{\beta}.$$

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Stationaarisuus-, käännettävyys- ja identifioituvuusehtojen voimassa ollessa SUE:t $\hat{\beta}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat tarkentuvia ja asympotoottisesti normaalisia.
- Erityisesti pätee

$$\hat{\beta}_{as} \sim N\left(\beta, \mathbf{V}(\beta)^{-1}\right), \quad (*)$$

jossa $\mathbf{V}(\beta) = E\left[-\partial^2 l(\beta, \sigma^2) / \partial \beta \partial \beta'\right]$ (σ^2 supistuu odotusarvon ottamisen myötä pois).

- Nämä tulokset pätevät myös ilman normaalisuusoletusta, joskaan estimaattorit eivät enää ole (asympotoottisesti) tehokkaita.
- Toisaalta stationaarisuus-, käännettävyys- ja identifioituvuusehdot vaaditaan tulokseen (*), joka voi tuottaa kehnon approksimaation myös silloin, kun nämä ehdot ovat "lähellä rikkoontua".

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

$$\hat{\beta}_{as} \sim N(\beta, \mathbf{V}(\beta)^{-1}), \quad (*)$$

- AR(p): $\mathbf{V}(\beta) = \mathbf{V}(\phi) = T\sigma^{-2}\mathbf{\Gamma}_p$, jossa $\mathbf{\Gamma}_p = [\gamma_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p}$ eli sama kuin YW - ja PNS-estimaattorilla.
- MA(q): $\mathbf{V}(\beta) = \mathbf{V}(\theta) = T\sigma^{-2}\mathbf{\Gamma}_q^*$, jossa $\mathbf{\Gamma}_q^* = [\gamma_{i-j}^*]_{i,j=1,\dots,q}$ ja γ_h^* on AR(q)-prosessin $\theta(B)y_t^* = \varepsilon_t$ autokovarianssifunktio ($\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$).
- ARMA(p,q): $\mathbf{V}(\beta) = T\sigma^{-2}\text{Cov}(\mathbf{x})$, jossa $\mathbf{x} = (y_1^+, \dots, y_p^+, y_1^*, \dots, y_q^*)$ ja y_t^+ AR(p)-prosessi $\phi(B)y_t^+ = \varepsilon_t$.

$$\hat{\beta}_{as} \sim N(\beta, \mathbf{V}(\beta)^{-1}) \quad (*)$$

- Havaittuun informaatiomatriisiin $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = \left[-\partial^2 l(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) / \partial \beta \partial \beta' \right]$ perustuvia Waldin testejä voidaan muodostaa tavanomaiseen tapaan (tässä $\hat{\sigma}^2$ ei supistu pois).
- Uskottavuusosamäärätestejä voidaan myös muodostaa tavanomaiseen tapaan log-uskottavuusfunktiota käyttäen.
- Nollahypoteesin voimassa ollessa identifioituvuusehdon täytyy kuitenkin päteä, joten esim. $H_0: \phi_p = \theta_q = 0$ ei ole mahdollinen.

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- $\hat{\beta}_{as} \sim N(\beta, \mathbf{V}(\beta)^{-1}), \quad \hat{\mathbf{V}}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = \left[-\partial^2 l(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) / \partial \beta \partial \beta' \right]$

- Esimerkiksi, jos $\mathbf{V}(\beta)^{-1} = [v^{ij}]$ ja $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)^{-1} = [\hat{v}^{ij}]$, niin $\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, v^{ii})$ ja nollahypoteesia $\beta_i = 0$, hylätään 5%:n merkitsevyytasolla, jos

$$\left| \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{v}^{ii}}} \right| \geq 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{\beta}_i| \geq 1.96 \sqrt{\hat{v}^{ii}}$$

- Vastaavasti, approksimatiivinen 95%:n luottamusväli β_i :lle on

$$(\hat{\beta}_i - 1.96 \cdot \text{s.e.}(\hat{\beta}_i), \hat{\beta}_i + 1.96 \cdot \text{s.e.}(\hat{\beta}_i)), \quad \text{s.e.}(\hat{\beta}_i) = \sqrt{\hat{v}^{ii}}$$

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Mallinvalintakriteerejä voidaan käyttää myös SU-estimaattorien kanssa valittaessa mallin asteita p ja q .
- Kriteerifunktio voidaan perustaa profiiliuskottavuusfunktioon

$$l_p(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{T}{2} \log S(\boldsymbol{\beta}) - \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\boldsymbol{\beta}).$$

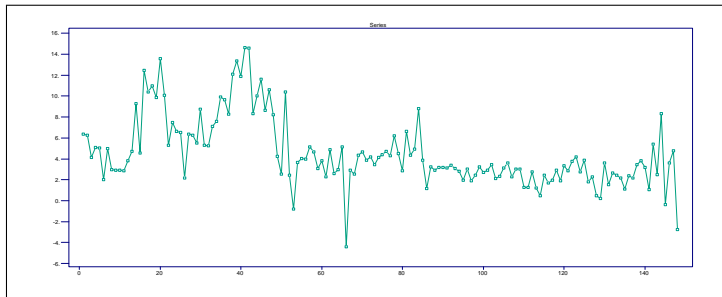
- Korvaamalla $\boldsymbol{\beta}$ SUE:lla $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, kertomalla $-2/T$:llä ja lisäämällä sakkotermi $-\log T$ sekä asteet estimaattoreihin saadaan kriteerifunktio

$$C_{SU}(p, q) = \log \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,q}) + (p+q)g(T)/T,$$

jossa $0 \leq p \leq p^*$, $0 \leq q \leq q^*$ ja sakkofunktio $g(\cdot)$ on kuten Hannanin ja Rissanen menetelmässä. Pienet kriteerifunktion arvot liittyvät jälleen "hyviin" malleihin.

ARMA-mallien rakentaminen

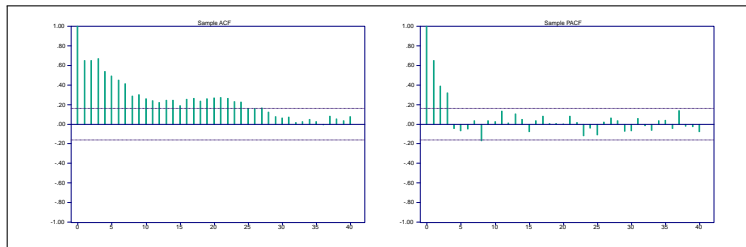
Parametrien tehokas estimointi



Kuvio 4.1. USAn neljännesvuosittainen inflaatioasarja ajanjaksolta 1970I - 2006IV ($T = 148$). Alkuperäisen kausipuhdistetun kuluttajien hintaindeksin logaritmiset differenssit kerrottuna neljälläsadalla.

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi



Kuvio 4.2. Kuvion 4.1 inflaationsarjan otosautokorrelaatiofunktio (vas.) ja otososittaisautokorrelaatiofunktio (oik.) viipymilla $h = 0, \dots, 40$.

- Estimoitu autokorrelaatiofunktio vaimenee viipymän pituuden kasvaessa. Estimoidussa osittaisautokorrelaatiofunktiossa on varsin selvä katkos viipymällä 3. Siten AR(3)-malli voisi olla sopiva.
- Hannanin ja Rissanen menetelmä valinnoilla $m = 10$ ja $p^* = q^* = 4$ johtaa myös AR(3)-malliin kaikilla kolmella sakkofunktiolla (samoin, kuin valinnoilla $m = 10$ ja $p^* = q^* = 5, \dots, 9$).

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

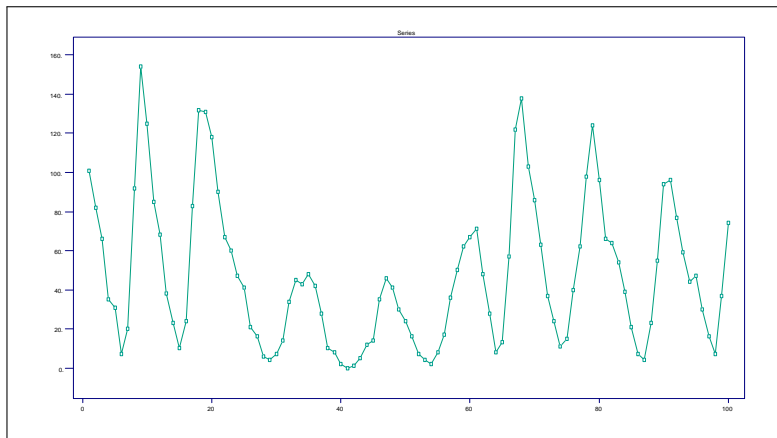
- Hannanin ja Rissasen menetelmä \Rightarrow AR(3)-malli Kuvion 4.1 inflaatioisarjalle. SU-estimointi ($\bar{y}_t = y_t - 4.56$):

$$\bar{y}_t = \underset{(0.080)}{0.275}\bar{y}_{t-1} + \underset{(0.081)}{0.263}\bar{y}_{t-2} + \underset{(0.080)}{0.321}\bar{y}_{t-3} + \hat{\varepsilon}_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 4.637,$$

- Kaikki estimaatit ovat selvästi yli kaksi kertaa yli likimääräisen keskivirheensä, mikä viittaa siihen, ettei mallia voida supistaa.
- Lisäksi, ARMA(4,0), ARMA(3,1) ja ARMA(4,1) "huonompia" kuin AR(3) kriteerifunktion $C_{SU}(p, q)$ perusteella kaikilla sakkofunktiolla AIC, HQ ja BIC.

ARMA-mallien rakentaminen

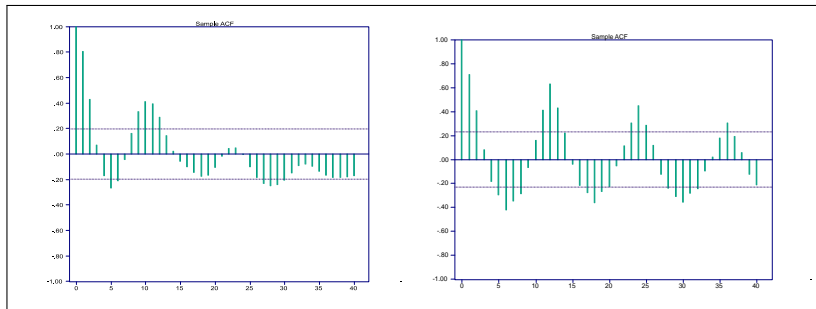
Parametrien tehokas estimointi



Kuvio 1.4. Vuotuisten auringonpilkkujen lukumäärä vuosilta 1770 - 1870.

ARMA-mallien rakentaminen

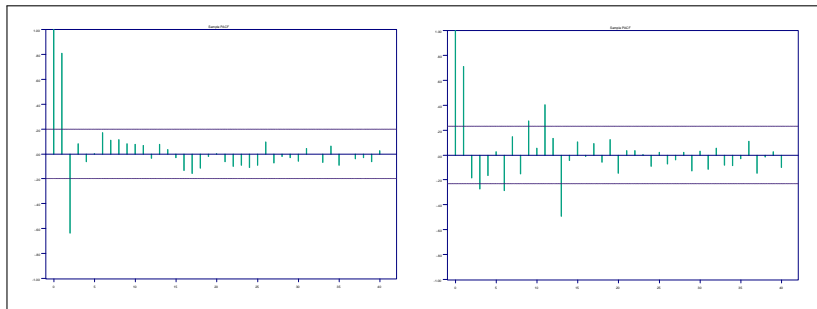
Parametrien tehokas estimointi



Kuvio 2.1. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjan otosautokorrelaatiofunktio (vas.) ja Kuvion 1.2 onnettomuussarjan otosautokorrelaatiofunktio (oik.) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi



Kuvio 3.2. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjan otososittaisautokorrelaatiofunktio (vas.) ja Kuvion 1.2 onnettomuussarjan otososittaisautokorrelaatiofunktio (oik.) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Estimoidun osittaisautokorrelaatiofunktion perusteella AR(2)-malli vaikuttaa sopivalta auringonpilkkusarjalle.
- Hannanin ja Rissanen menetelmä valinnoilla $m = 10$ ja $p^* = q^* = 4$ johtaa kaikilla kolmella sakkofunktiolla (AIC, HQ, BIC) kuitenkin laajempaan ARMA(2,1)-malliin.

ARMA-mallien rakentaminen

Parametrien tehokas estimointi

- Otosautokorrelaatio- ja otososittaisautokorrelaatiofunktiot \Rightarrow AR(2)-malli.
- Hannanin ja Rissasen menetelmä \Rightarrow ARMA(2,1)-malliksi, jonka estimointi tuotti ($\tilde{y}_t = y_t - 46.93$)

$$\tilde{y}_t = \underset{(0.112)}{1.225}\tilde{y}_{t-1} - \underset{(0.108)}{0.561}\tilde{y}_{t-2} + \hat{\varepsilon}_t + \underset{(0.132)}{0.385}\hat{\varepsilon}_{t-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = 213.96,$$

Tulos osoittaa, että MA-parametrin estimaatti on selvästi ”merkitsevä”.

- Yleisemmin tämä esimerkki osoittaa, että autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioiden avulla ei aina ole helppo valita ARMA-mallin asteita.

ARMA-mallien rakentaminen

Mallin riittävyyden tarkistaminen

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

- Rakennettaessa ARMA-mallia tavoitteena on, että mallin (tavalla tai toisella) valitut asteet p ja q on valittu siinä mielessä oikein, että virhetermi ε_t toteuttaa oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ tai mielellään jopa $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$, mutta p ja q eivät ole ainakaan samanaikaisesti suurempia kuin on tarpeen (säästäväisyysperiaate). Myös SU-estimointi olettaa tämän.
- Vaikka asteet olisikin valittu oikein, voivat virheet olla vain autokorreloimattomia, mutta eivät riippumattomia eivätkä normaalisti jakautuneita, mitä on hyvä tutkia.

ARMA-mallien rakentaminen

Mallin riittävyyden tarkistaminen

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

- Valitun ARMA(p,q)-mallin riittävyyttä tutkittaessa kannattaa kiinnittää huomiota erityisesti "naapurimalleihin" eli ARMA(p+1,q)- ja ARMA(p,q+1)-malliin, joiden parametrit voidaan estimoida SU-menetelmällä ja tutkia poikkeako lisätty AR-parametri tai MA-parametri nolasta.
- Laajempia vaihtoehtojakin voi tietysti kokeilla.
- Lisäksi on luontevaa tutkia ovatko virheiden ε_t empiiriset vastineet oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ tai $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$ mukaisia.

ARMA-mallien rakentaminen

Mallin riittävyyden tarkistaminen

- Virheiden ε_t empiiriset vastineet eli *residuaalit* $\hat{\varepsilon}_t$ ($t = 1, \dots, T$) määritellään seuraavasti.
- Koska oikean mallin tapauksessa

$$E(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{ja} \quad \text{Cov}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{C}\mathbf{C}', \quad \text{niin}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}) &= \mathbf{C}^{-1}\text{Cov}(\mathbf{y})\mathbf{C}^{-1'} \\ &= \sigma^2 \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}'\mathbf{C}^{-1} \\ &= \sigma^2 \mathbf{I}_T. \end{aligned}$$

- Siis, luonteva määritelmä on (mahdollisesti $y_t \rightarrow y_t - \bar{y}$)

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_1 \ \dots \ \hat{\varepsilon}_T]' = \mathbf{C}(\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \mathbf{y}.$$

- Käytännössä voidaan käyttää myös skaalattuja residuaaleja $\hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}$, joiden tulisi oikein spesifioidun mallin tapauksessa olla likimain riippumattomia odotusarvona nolla ja varianssina yksi.

ARMA-mallien rakentaminen

Mallin riittävyyden tarkistaminen

- Residuaalien ominaisuuksien tutkiminen on syytä aloittaa piirtämällä residuaalien aikasarja.
- Oikean mallin tapauksessa, residuaaleissa ei saisi näkyä systemaattista vaihtelua "tasossa" eikä varianssissa (heteroskedastisuutta) eikä poikkeavia havaintoja, ajanjaksoja tms.
- Seuraavaksi voidaan tutkia residuaalista laskettuja autokorrelaatioita \hat{r}_h .
- Kriittiset rajat $\pm 1.96/\sqrt{T}$ eivät oikeita edes asymptoottisesti, mutta voivat silti toimia "karkena mittakaavana".
- Aikaisempi Ljungin ja Boxin testisuure vaatii modifikaation:

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{h=1}^H \hat{r}_h^2 / (T-h) \underset{as}{\sim} \chi_{H-p-q}^2,$$

kun H on "suuri" (käytännössä ehkä 10-30 riippuen T :n koosta).

ARMA-mallien rakentaminen

Mallin riittävyyden tarkistaminen

- Virheissä mahdollisesti esiintyvien epälineaaristen riippuvuuksien (ja ei-normaalisuuden) paljastamisessa voidaan käyttää (rajoitetussa mielessä) residuaalien neliöiden autokorrelaatioita ja McLeodin ja Lin testisuureta.
- Jos teoreettisille virheille pätee $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, ovat neliöityjen residuaalien $\hat{\varepsilon}_t^2$ ($t = 1, \dots, T$) otosautokorrelaatiot $r_h(\hat{\varepsilon}_t^2)$ likimain riippumattomia ja $N(0, 1/T)$ -jakautuneita.
- Siis, kriittiset rajat $\pm 1.96/\sqrt{T}$ toimivat ja samoin McLeodin ja Lin testisuure

$$T(T+2) \sum_{h=1}^H r_h^2(\hat{\varepsilon}_t^2) / (T-h) \underset{\text{as}}{\sim} \chi_H^2$$

ilman, että viipymän H tarvitsee olla "suuri".

- McLeod ja Li ovat osoittaneet nämä tulokset päteviksi myös oletuksilla $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ja $E(\varepsilon_t^8) < \infty$.

- Jos virheet ovat vain autokorreloimattomia, mutta eivät riippumattomia, ei tulos

$$\hat{\beta}_{as} \sim N\left(\beta, \mathbf{V}(\beta)^{-1}\right) \quad (*)$$

(yleensä) päde.

- $\hat{\beta}$:n tarkentuvuus ja asymptoottinen normaalisuus voidaan kuitenkin osoittaa yleisin oletuksin, mutta kovarianssimatriisi ei ole (yleensä) kuten (*):ssä (ks. jakso 6.3).
- Tällöin tulokseen (*) perustuvat keskivirheet ja testit eivät myöskään ole (yleensä) päteviä.