

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

- Miten ennustetaan satunnaismuuttujan Y arvoa, kun tiedetään, että satunnaisvektori $X = x$?
- Todennäköisyyslaskennasta tiedetään, että

$$E \left[(Y - E(Y|X = x))^2 \right] \leq E \left[(Y - g(x))^2 \right]$$

olipa $g(x)$ mikä tahansa x :n funktio.

- Ts., keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennuste on Y :n ehdollinen odotusarvo ehdolla $X = x$.

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

- Oletetaan, että jakaumat ovat jatkuvia ja palautetaan mieleen ehdollinen odotusarvo määritelmä

$$E(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y; x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_{Y,X}(y, x)}{f_X(x)} dy.$$

- Tässä
 - $f_{Y,X}(y, x)$ on satunnaisvektorin (Y, X) yhteistiheysfunktio,
 - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y,X}(y, x) dy$ on X :n reunajakauman tiheysfunktio ja
 - $f_{Y|X}(y; x) = \frac{f_{Y,X}(y, x)}{f_X(x)}$ on Y :n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $X = x$.

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

- Kun x vaihtelee, voidaan $E(Y | X = x)$ tulkita x :n funktioksi, joka määrittelee satunnaismuuttujan, josta käytetään merkintää $E(Y | X)$.
- Kehittyneessä todennäköisyyslaskennassa ehdollinen odotusarvo määritellään suoraan satunnaismuuttujana ja määritelmä kattaa tapaukseen, jossa X voi olla ääretönulotteinen.
- ARMA(p,q)-prosessia ennustettaessa on Y :n paikalla y_{t+h} ($h \geq 1$) ja X :n paikalla $\{y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$.

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

- Ehdollisen odotusarvon $E(Y|X)$ tavanomaiset ominaisuudet pätevät myös, kun X on ääretönulotteinen:

E01 $E(aY_1 + bY_2 | X) = aE(Y_1 | X) + bE(Y_2 | X)$, kun a ja b ovat vakioita.

E02 $E(Y | X) = E(Y)$, kun $Y \perp\!\!\!\perp X$.

E03 $E(Y) = E[E(Y | X)]$ (ns. iteroidun odotusarvon laki)

E04 $E[h(X) Y | X] = h(X) E(Y | X)$ mille tahansa funktiolle h (olettaen, että tulon $h(X) Y$ odotusarvo on äärellisenä olemassa).

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

- Käytännössä on havaittu aikasarja y_1, \dots, y_T ja halutaan ennustaa (esim.) seuraavaa arvoa y_{T+1} .
- Tällöin ennuste täytyy perustaa havaintoihin y_1, \dots, y_T .
- Tällä kurssilla ennuste perustetaan tarkastellaan kuitenkin (epärealistisesti) prosessin koko menneeseen historiaan $\{y_t, t \leq T\}$.
- Tämä johtaa yksinkertaisempiin ennustekaavoihin kuin edellä mainittu tapa, joka on puolestaan käsitteellisesti yksinkertaisempi. Ero on kuitenkin mitätön, ellei T ole kovin pieni.
- Oletetaan, että $y_t \sim \text{ARMA}(p,q)$, joka on stationaarinen ja käännettävä ja (epärealistisesti) että parametriarvot tunnetaan. Lisäksi oletetaan, että prosessin innovaatio toteuttaa ehdon $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ja että $E(y_t) = \mu = 0$.

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

AR(p)-tapaus

- AR(p)-prosessin

$$y_{t+h} = \phi_1 y_{t+h-1} + \dots + \phi_p y_{t+h-p} + \varepsilon_{t+h}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

yleinen ennustekaava saadaan ottamalla puolittain $E_t(\cdot)$ ($h \geq 1$):

$$E_t(y_{t+h}) = \phi_1 E_t(y_{t+h-1}) + \phi_2 E_t(y_{t+h-2}) + \dots + \phi_p E_t(y_{t+h-p}),$$

jossa

$$E_t(y_{t+h-j}) = y_{t+h-j}, \quad \text{kun } h \leq j.$$

- Ts., ennustekaavassa oikealla olevat ehdolliset odotusarvot korvataan prosessin "havaituilla arvoilla, kun sellaiset tunnetaan".
- Ennusteet voidaan laskea rekursiivisesti aloittaen tapauksesta $h = 1$ ja edeten yksi kerrallaan tapauksiin $h = 2, h = 3, \dots$

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

ARMA(p,q)-tapaus

$$y_{t+h} = \phi_1 y_{t+h-1} + \cdots + \phi_p y_{t+h-p} \\ + \varepsilon_{t+h} + \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t+h-q} \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

Yleinen ennustekaava saadaan ottamalla puolittain $E_t(\cdot)$:

$$E_t(y_{t+h}) = \phi_1 E_t(y_{t+h-1}) + \cdots + \phi_p E_t(y_{t+h-p}) \\ + \theta_1 E_t(\varepsilon_{t+h-1}) + \cdots + \theta_q E_t(\varepsilon_{t+h-q}), \quad h \geq 1,$$

jossa

$$E_t(y_{t+h-j}) = y_{t+h-j}, \quad \text{kun } h \leq j,$$

ja

$$E_t(\varepsilon_{t+h-j}) = \begin{cases} \varepsilon_{t+h-j}, & \text{kun } h \leq j \\ 0, & \text{kun } h > j \end{cases}$$

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

ARMA(p,q)-tapaus

- Käytännössä edellä tunnetuiksi oletetut parametrit ϕ_1, \dots, ϕ_p ja $\theta_1, \dots, \theta_q$ ovat tuntemattomia ja korvataan estimaateilla, jolloin ennusteen optimaalisuus pätee vain likimääräisesti.
- Kun vain y_1, \dots, y_T käytännössä käytettävissä, ei muuttujan $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$ arvoa ole mahdollista laskea tarkasti.

- Yksi vaihtoehto on käyttää katkaistua summaa $\sum_{j=0}^{t-1} \pi_j y_{t-j}$, $t \geq 1$.
- Toinen on laskea ε_t ajankohdilla $t \geq p + 1$ differenssiyhtälöstä

$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

jossa alkuarvoiksi $\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+1-q}$ voidaan valita 0 eli innovaation ε_t (ehdoton) odotusarvo.

- Kun t on suuri, on näiden alkuarvo-oletusten vaikutus käytännössä mitätön.

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ennusteen luottamusväli

- ARMA(p,q)-prosessin MA(∞)-esityksestä saadaan ennustevirheelle lauseke

$$y_{t+h} - E_t(y_{t+h}) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{t+h-j},$$

joten yhden askeleen ennustevirhe $y_{t+1} - E_t(y_{t+1})$ on innovaatio ε_{t+1} .

- Lisäksi pätee

$$E(y_{t+h} - E_t(y_{t+h})) = 0 \quad \text{eli ennusteen harhattomuus}$$

ja

$$\text{Var}(y_{t+h} - E_t(y_{t+h})) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \equiv \sigma_h^2.$$

- Ennustehorisontin h kasvaessa ennuste lähestyy (kvadraattisesti) nollaa (yleisemmin prosessin odotusarvoa) ja ennustevirheen varianssi σ_h^2 lähestyy ennustettavan prosessin y_t varianssia.

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ennusteen luottamusväli

- Jos oletetaan $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$, niin

$$y_{t+h} - E_t(y_{t+h}) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{t+h-j} \sim N(0, \sigma_h^2), \quad \sigma_h^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2.$$

- Näin ollen,

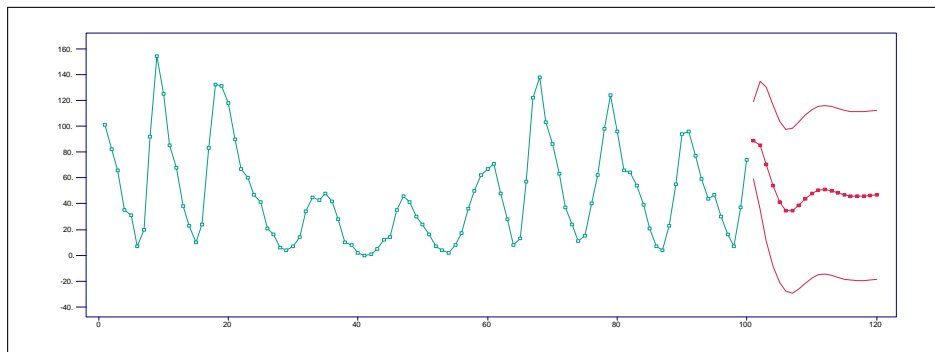
$$0.95 = P \{ E_t(y_{t+h}) - 1.96\sigma_h \leq y_{t+h} \leq E_t(y_{t+h}) + 1.96\sigma_h \},$$

joten

$$y_{t+h} \in [E_t(y_{t+h}) - 1.96\sigma_h, E_t(y_{t+h}) + 1.96\sigma_h]$$

95%:n todennäköisyydellä.

- Käytännössä tuntemattomat parametrit ennusteessa $E_t(y_{t+h})$ ja hajonnassa σ_h korvataan estimaateilla, jolloin tämä jakaumatulos pätee vain likimääräisesti.



Kuvio 3.4. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjalle AR(2)-prosessilla lasketut 20 ennustetta ja ennusteiden 95%:n luottamusrajat.

Yule-Walker -estimointi ($\tilde{y}_t = y_t - 46.93$):

$$\tilde{y}_t = 1.32\tilde{y}_{t-1} - 0.63\tilde{y}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 232.90.$$

- Käytännössä on havaittu, että varsin usein epästationaariselta näyttävä aikasarja saadaan stationaarisen näköiseksi siirtymällä sarjan muutoksiin eli differensseihin. (Aina tämän ei tietenkään tarvitse toimia hyvin.)
- Satunnaiskulun $y_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$, $t = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, differenssit

$$\Delta y_t = (1 - B) y_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

ovat stationaarisia ja sama pätee, vaikka oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ asemesta ε_t oletetaan vain stationaariseksi.

ARIMA(p,d,q)-prosessi

- Jos prosessi y_t , $t = 0, 1, \dots$, on epästationaarinen, mutta sen differenssi Δy_t on stationaarinen ja käännettävä ARMA(p,q)-prosessi, sanotaan y_t :tä ARIMA(p,1,q)-prosessiksi.
- Jos myös differenssi Δy_t on epästationaarinen, mutta toinen differenssi $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t)$ on stationaarinen ja käännettävä ARMA(p,q)-prosessi, sanotaan y_t :tä ARIMA(p,2,q)-prosessiksi.
- Yleisesti, jos prosessi y_t , $t = 0, 1, \dots$, on epästationaarinen, mutta sen d . differenssi $\Delta^d y_t$ on stationaarinen ja käännettävä ARMA(p,q)-prosessi, sanotaan y_t :tä ARIMA(p,d,q)-prosessiksi.
- Käytännössä d on 0 tai 1 ja joskus harvoin 2 (kun $d = 0$ saadaan stationaarinen ARMA(p,q)-prosessi).

ARIMA(p,d,q)-prosessi

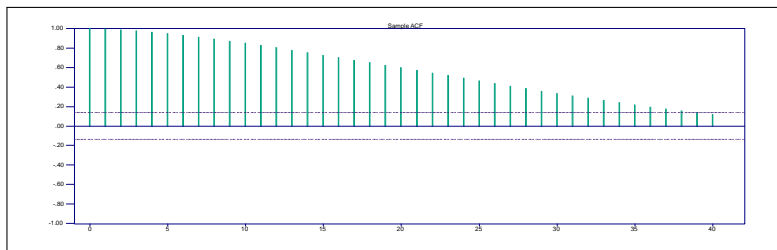
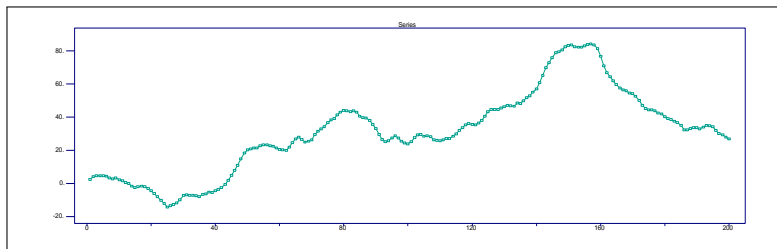
- ARIMA(p,d,q) prosessi ($d > 0$) täytyy määritellä kiinnittämällä alkujakohta (eli $t = 1$), jolloin y_1 määräytyy alkuarvoista y_0, \dots, y_{1-p-d} ja innovaatioista $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{1-q}$.
- ARIMA(p,1,q)-prosessin tyypilliset ominaisuudet ovat pääpiirteissään samanlaiset kuin satunnaiskululla $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, $t \geq 1$, jolle pätee kiinteän alkuarvon y_0 tapauksessa

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2 t$$

$$\text{Cor}(y_t, y_{t+h}) = 1/\sqrt{1+h/t} \rightarrow 1 \quad \forall h > 0, \text{ kun } t \rightarrow \infty.$$

- Realisaatioiden ilme on vaelteleva, mikä selittyy varianssin kasvamisella t :n funktiona ja voimakkaalla autokorreloituneisuudella.
- Tämä pätee myös yleisemmillä ARIMA(p,d,q)-prosesseilla, joilla otosautokorrelaatiofunktion vaimeneminen noltaan tapahtuu korkeintaan hitaasti.

ARIMA(p,d,q)-prosessi



Simuloitu aikasarja ARIMA(1,1,0)-prosessista $(1 - 0.8B) \Delta y_t = \varepsilon_t$,
 $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$, $t = 1, \dots, 200$, ja siitä laskettu autokorrelaatiofunktio.