- Merkitsemällä

$$\gamma_h = [\gamma_1 \ \cdots \ \gamma_h]' \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\Gamma}_h = \left[\gamma_{i-j}\right]_{i,j=1,\ldots,h}$$

voidaan *osittaisautokorrelaatiofunktio* viipymällä h määritellä yhtälöllä

$$\alpha_h = \begin{cases} 1, & \text{kun } h = 0 \\ \text{vektorin } \boldsymbol{\Gamma}_h^{-1}\gamma_h \text{ viimeinen komponentti, kun } h \geq 1. \end{cases}$$

- **Huom.**: $\boldsymbol{\Gamma}_h^{-1}\gamma_h$ on AR(h)-prosessin kerroinvektorille $(\phi_1, \ldots, \phi_h)$ Yule-Walker -yhtälöstä saatu esitys, joka voidaan määritellä mille tahansa heikosti stationaariselle prosessille.

- Olkoon $\mathbf{X}$ $(p \times 1)$, $\mathbf{X}^{(1)}$ $(q \times 1)$, $\mathbf{X}^{(2)}$ $((p-q) \times 1)$ ja

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}_p\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right), \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}.$$

- Pätee

$$\mathbf{X}^{(1)} \,\Big|\, \left(\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)}\right) \sim \mathrm{N}_q\left(\boldsymbol{\mu}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\right), \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}\right),$$

  jossa $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$ ei riipu ehtomuuttujan $\mathbf{X}^{(2)}$ arvosta.

- Ts., osittaiskovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}$ kertoo satunnaisvektorin $\mathbf{X}^{(1)}$ komponenttien välisistä riippuvuuksista, kun satunnaisvektorin $\mathbf{X}^{(2)}$ (lineaariset) vaikutukset on eliminoitu. Vastaavat osittaiskorrelaatiot "skaalaamalla varianssilla".

- α_h on identtinen tavanomaisen osittaiskorrelaatiokertoimen kanssa
- eli α_h mittaa satunnaismuuttujien y_t ja y_{t-h} välisen korrelaation suuruutta, kun satunnaismuuttujien $y_{t-1}, \dots, y_{t-h+1}$ lineaarinen vaikutus on eliminoitu.
- Erityisesti pätee siis $|\alpha_h| \leq 1$.
- AR(p)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktiolle pätee

$$y_t \ \sim \ \text{AR(p)} \ \Rightarrow \ \alpha_p = \phi_p \ \text{ ja } \ \alpha_h = 0, \text{ kun } h > p.$$

- Toisin sanoen, AR(p)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktiossa on katkos viipymällä p (olettaen $\phi_p \neq 0$).

- Osittaisautokorrelaatiofunktion empiirinen vastine saadaan käyttäen otosautokovariansseja c_h.
- Määritellään siis

$$\mathbf{c}_h = [c_1 \ \cdots \ c_h]' \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_h = [c_{i-j}]_{i,j=1,\ldots,h}$$

ja muodostetaan estimaatit

$$\hat{\alpha}_h = \begin{cases} 1, \quad \text{kun } h = 0 \\ \text{vektorin } \mathbf{C}_h^{-1}\mathbf{c}_h \text{ viimeinen komponentti, kun } h \geq 1. \end{cases}$$

- Estimaattien $\hat{\alpha}_h$, $h = 1, 2, \ldots$, laskemiseksi on olemassa rekursiokaavoja, joita käyttäen mahdollisesti suuren matriisin $\mathbf{C}_h$ kääntäminen voidaan välttää (sama pätee myös teoreettisille osittaisautokorrelaatiokertoimille).

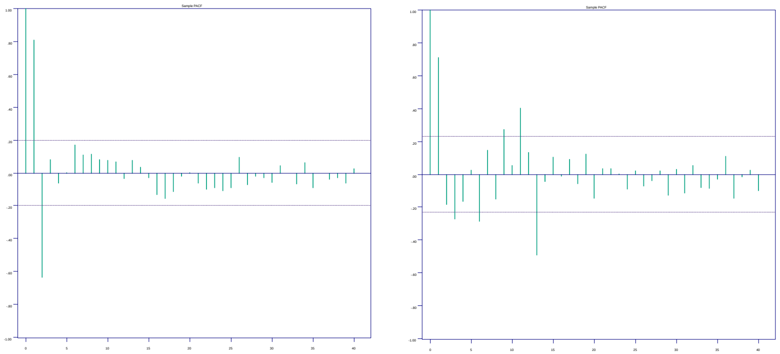
- $y_t \sim \text{AR(p)} \Rightarrow$ estimaattorit $\hat{\alpha}_h$, $h > p$, ovat likimain riippumattomia ja $\text{N}(0, T^{-1})$–jakautuneita.
- Tällöin,

$$\text{P}\left\{|\hat{\alpha}_h| \geq 1.96/\sqrt{T}\right\} \approx 0.05, \quad \text{kun} \quad h > p,$$

- ja toisaalta (oletetaan $\phi_p \neq 0$)

$$\hat{\alpha}_p \xrightarrow{p} \alpha_p = \phi_p,$$

joten tapauksessa $h = p$ edellä mainittu todennäköisyys lähestyy ykköstä.



Kuvio 3.2. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjan otososittaisauto-korrelaatiofunktio (vasemmalla) ja Kuvion 1.2 onnettomuussarjan otososittaisautokorrelaatiofunktio (oikealla) viipymillä $h = 0, \ldots, 40$.

MA(q)-prosessi

Määritelmä

- MA(q)-prosessin määrittely-yhtälö on

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right),$$

tai, kun $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_p B^q$,

$$y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

- Prosessin nykyisen arvon oletetaan riippuvan lineaarisesti nykyisestä ja q:sta edeltävästä ei-havaittavasta satunnaissokista tai virheestä (tai innovaatiosta).

- Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan ottaa huomioon tarkastelemalla prosessia $y_t - \mu$, jossa $\mu = \mathrm{E}(y_t)$.

- MA(q)-prosessi on (kausaalisen) lineaarisen prosessin erikoistapauksena aina stationaarinen.
- Autokovarianssifunktio saadaan jaksosta 2.2.2:

$$\gamma_h = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}, & \text{kun} \quad 0 \leq h \leq q \\ 0, \quad \text{kun} \quad h > q, \end{cases}$$

jossa $\theta_0 = 1$.

- Autokorrelaatiofunktio kaavalla $\rho_h = \gamma_h / \gamma_0$.
- MA(q)-prosessin autokorrelaatiofunktiossa on siis katkos viipymällä q (olettaen, että $\theta_q \neq 0$).

- Jos otosautokorrelaatiofunktiossa havaitaan katkos viipymällä q, voidaan MA(q)-prosessin epäillä olevan sopiva malli havaitulle aikasarjalle.
- $y_t \sim \mathrm{MA(q)} \Rightarrow$ estimaattorit r_h, $h > q$, ovat likimain $\mathrm{N}(0, \mathrm{w}_q / T)$–jakautuneita, jossa $\mathrm{w}_q = 1 + 2\rho_1^2 + \cdots + 2\rho_q^2$.
- Tällöin,

$$\mathrm{P}\left\{|r_h| \geq 1.96\sqrt{\hat{\mathrm{w}}_q / T}\right\} \approx 0.05, \quad \text{kun} \quad h > q,$$

  jossa $\hat{\mathrm{w}}_q = 1 + 2\mathrm{r}_1^2 + \cdots + 2\mathrm{r}_q^2$.
- Nämä rajat ovat leveämpiä kuin tapauksessa $y_t \sim \mathrm{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, jossa $\hat{\mathrm{w}}_q$:n paikalla on 1.

- Jos $\theta_* = 1/\theta$, $\sigma_*^2 = \theta^2\sigma^2$ ja $\varepsilon_{*t} = \theta\varepsilon_t$, niin MA(1)-prosesseilla

  $$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$$

  ja

  $$y_t = \varepsilon_{*t} + \theta_*\varepsilon_{*t-1} \quad \varepsilon_{*t} \sim \text{iid}\left(0, \sigma_*^2\right).$$

  on sama autokovarianssifunktio.
- Näin ollen niitä ei voida erottaa toisistaan autokovarianssifunktion tai autolorrelaatiofunktion avulla.
- Jos $\varepsilon_t \sim \text{nid}\left(0, \sigma^2\right)$, niin SU-estimoinnissa parametrikombinaatioita $\left(\theta, \sigma^2\right)$ ja $\left(\theta_*, \sigma_*^2\right)$ ei voida erottaa toisistaan eli *parametri* $\left(\theta, \sigma^2\right)$ *ei ole identifioituva*.
- Koska $|\theta| < 1 \Leftrightarrow |\theta_*| > 1$, on tullut tavaksi ratkaista identifioituvuusongelma olettemalla $|\theta| < 1$ ($\theta = 1$ suljetaan pois muista syistä).

- Tarkastellaan aluksi MA(1)-prosessia

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1.$$

- Koska $\varepsilon_t = y_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$, saadaan peräkkäisillä sijoituksilla
- $y_t = -\sum_{j=1}^{k} (-\theta_1)^j y_{t-j} - (-\theta_1)^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_t$ ja siten esitys

$$y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} (-\theta_1)^j y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

- Tässä sarja määritellään osasummien kvadraattisena raja-arvoa.
- Kun $|\theta_1| < 1$, sanotaan MA(1)-prosessia *käännettäväksi*.

- MA(1)-prosessi

$$y_t \quad = \quad \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} = \theta\left(B\right)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right),$$

  on käännettävä, jos $|\theta_1| < 1$

- tai yhtäpitävästi, jos polynomin

$$\theta\left(z\right) = 1 + \theta_1 z$$

  juuret sijaitsevat yksikköympyrän kehän ulkopuolella

- tai yhtäpitävästi, jos

$$\theta\left(z\right) \neq 0, \quad \text{kun} \quad |z| \leq 1.$$

- Kuten AR-prosessien stationaarisuusehto, viimeksi mainuttujen ilmeiset yleistykset kelpaavat MA(q)-prosessin käännettävyysehdoksi.

MA(q)-prosessi

Käännettävyys

- MA(q)-prosessi

$$y_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q) \varepsilon_t = \theta(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

- **MA(q)-prosessin käännettävyysehto**. MA(q)-prosessi on käännettävä, jos polynomin $\theta(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, jos $\theta(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$.

- Takaa ratkaisun $y_t = \theta(B) \varepsilon_t \Rightarrow \theta(B)^{-1} y_t = \varepsilon_t$ ja esityksen

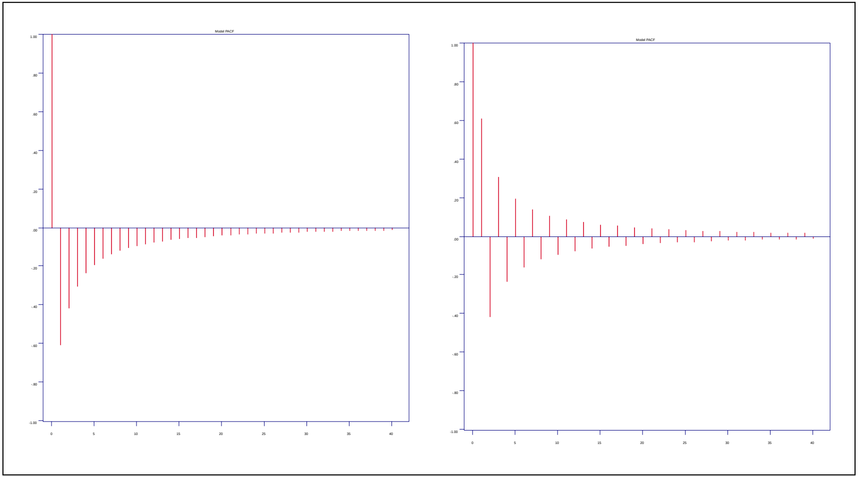
$$y_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j} + \varepsilon_t \quad \text{tai} \quad \pi(B) y_t = \varepsilon,$$

jossa $\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j = \theta(B)^{-1}$.

- Kuten MA(1)-tapauksessakin, takaa käännettävyys sen, että MA(q)-prosessin autokovarianssifunktion (tai autokorrelaatiofunktion) ja parametrien $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_q)$ ja σ^2 välille saadaan kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus.
- Tämä vastaavuus on ensimmäisen asteen tapausta lukuun ottamatta melko monimutkainen.
- Normaalisen prosessin tapauksessa (tai autokovariansseihin perustuvissa tarkasteluissa) käännettävyys ei ole rajoittava oletus (ainakaan, jos tapaus $\theta(z) \neq 0$, $|z| = 1$ suljetaan pois).
- Ellei toisin mainita, oletetaan MA-prosessit jatkossa aina käännettäväksi.

- Käännettävän MA(q)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktio on hankala esittää.
- Koska käännettävällä MA(q)-prosessilla on AR(∞)-esitys on intuitiivisesti selvää, että osittaisautokorrelaatiofunktiossa ei ole katkosta, vaan se vaimenee eksponentiaalisesti nollaan.
- Kun q = 1, saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_h &= -(-\theta_1)^h \,/\, \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_1^{2h}\right) \\ &= -(-\theta_1)^h \left(1 - \theta_1^2\right) \Big/ \left(1 - \theta_1^{2(h+1)}\right). \end{aligned}$$



Kuvio 3.3. MA(2)-prosessin $y_t = \left(1 - \zeta_1^{-1} B\right) \left(1 - \zeta_2^{-1} B\right) \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, osittaisautokorrelaatiofunktioita $\left(h = 0, ..., 40\right)$. Käännetyt juuret $\zeta_1^{-1} = 0.95$, $\zeta_2^{-1} = 0.3$ (vasemmalla) ja $\zeta_1^{-1} = -0.95$, $\zeta_2^{-1} = -0.3$ (oikealla).

ARMA(p,q)-prosessi
Määrittely

- ARMA(p,q)-prosessin määrittely-yhtälö on

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \\ \varepsilon_t &\sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \end{aligned}$$

  tai

$$\phi(B)\, y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \quad \text{jossa}$$

  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ ja $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$.

- Jos $\theta(B) = 1$ (eli $q = 0$), saadaan erikoistapauksena AR(p)-prosessi ja jos $\phi(B) = 1$ (eli $p = 0$), saadaan MA(q)-prosessi.
- ARMA(p,q) = AR(p), jonka virheinä on (autokorreloitunut) MA(q)-prosessi.
- Nollasta poikkeava odotusarvo: $y_t \rightarrow y_t - \mu$, jossa $\mu = \mathrm{E}(y_t)$.

- ARMA(p,q)-prosessilla

$$\phi(B)\, y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

on hyvin määritelty (kausaalinen) MA(∞)-esitys, jos AR-polynomi $\phi(z)$ toteuttaa AR(p)-prosessin riittävän stationaarisuusehdon (sovelletaan AR(p)-prosessille esitettyä MA(q)-virheiden tapauksessa).

- **ARMA(p,q)-prosessin riittävä stationaarisuusehto**. Riittävä ehto ARMA(p,q)-prosessin stationaarisuudelle on, että polynomin $\phi(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, että $\phi(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$.

- Stationaarisuusehto takaa, että yhtälöstä

$$\phi\left(B\right)y_t = \theta\left(B\right)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

saadaan hyvin määritelty ratkaisu

$$y_t = \frac{\theta\left(B\right)}{\phi\left(B\right)}\varepsilon_t = \psi\left(B\right)\varepsilon_t, \quad \psi\left(B\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^j = \frac{\theta\left(B\right)}{\phi\left(B\right)}.$$

- Kertoimet ψ_j yhtälöstä

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(\psi_0 + \psi_1 B + \cdots) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$$

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{p}\phi_i \psi_{j-i} + \theta_j, \quad j = 0, 1, 2, ...,$$

jossa $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0$, $j > q$, ja $\psi_j = 0$, $j < 0$.

- ARMA(p,q)-prosessilla

$$\phi\left(B\right)y_t = \theta\left(B\right)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

on hyvin määritelty AR(∞)-esitys, jos MA-polynomi $\theta\left(z\right)$ toteuttaa MA(q)-prosessin käännettävyysehdon (sovelletaan MA(q)-prosessille esitettyä prosessiin $\phi\left(B\right)y_t$).

- **ARMA(p,q)-prosessin käännettävyysehto**. ARMA(p,q)-prosessi on käännettävä, jos polynomin $\theta\left(z\right)$ $\left(z \in \mathbb{C}\right)$ juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, jos $\theta\left(z\right) \neq 0$, kun $\left|z\right| \leq 1$.
- MA(1)-prosessille esitetyt käännettävyyteen liittyvät periaatteelliset kysymykset yleistyvät myös ARMA(p,q)-prosesseilla.
- Erityisesti, normaalisen prosessin tapauksessa (tai autokovariansseihin perustuvissa tarkasteluissa) käännettävyys ei ole rajoittava oletus (ainakaan, jos tapaus $\theta\left(z\right) = 0$, $\left|z\right| = 1$ suljetaan pois).

- Käännettävyysehto takaa, että yhtälöstä

$$\phi(B)\,y_t = \theta(B)\,\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

saadaan hyvin määritelty ratkaisu

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} y_t = \pi(B)\,y_t = \varepsilon_t, \quad \pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j = \frac{\phi(B)}{\theta(B)}.$$

- Kertoimet π_j yhtälöstä

$$\left(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q\right)\left(\pi_0 + \pi_1 B + \cdots\right) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$$

$$\pi_j = -\sum_{i=1}^{q} \theta_i \pi_{j-i} - \phi_j, \quad j = 0, 1, 2, ...,$$

jossa $\phi_0 = -1$, $\phi_j = 0$, $j > p$, ja $\pi_j = 0$, $j < 0$.

ARMA(p,q)-prosessi

Identifioituvuus

- MA(q)-prosessin käännettävyyttä motivoitiin sillä, että se takaa kääntäen yksikäsitteisen vastaavuuden prosessin autokovarianssifunktion ja parametrien välille.
- ARMA(p,q)-prosessilla käännettävyys ei yksistään takaa tätä.
- Esim. (stationaarisella) ARMA(1,1)-prosessilla on lineaarinen esitys

$$y_t = \frac{(1+\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}\varepsilon_t.$$

- Kun $\phi_1 = -\theta_1$, on

$$\frac{(1+\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)} = \frac{(1+\theta_1 B)}{(1+\theta_1 B)} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_t = \varepsilon_t$$

eli ARMA(1,1)-prosessi supistuu valkoiseksi kohinaksi (HT 2.3).

ARMA(p,q)-prosessi

Identifioituvuus

- Kirjoitetaan yleinen (stationaarinen ja käännettävä) ARMA(p,q)-prosessi $\left(\phi_p \neq 0,\ \theta_q \neq 0,\ p \geq 1 \text{ ja } q \geq 1\right)$

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t = \frac{\left(1-\xi_1^{-1}B\right)\cdots\left(1-\xi_q^{-1}B\right)}{\left(1-\zeta_1^{-1}B\right)\cdots\left(1-\zeta_p^{-1}B\right)}\varepsilon_t.$$

- Jos jollain i pätee $\zeta_i = \xi_i$, niin voidaan supistaa ja saada ARMA(p-1,q-1)-prosessi.

- **ARMA(p,q)-prosessin yksikäsitteisyys- eli identifioituvuusehto** Stationaarisen ja käännettävän ARMA(p,q)-prosessin polynomeilla

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \quad \text{ja} \quad \theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_p z^q$$

ei ole yhteisiä juuria ja lisäksi $\phi_p \neq 0$ tai $\theta_q \neq 0$.

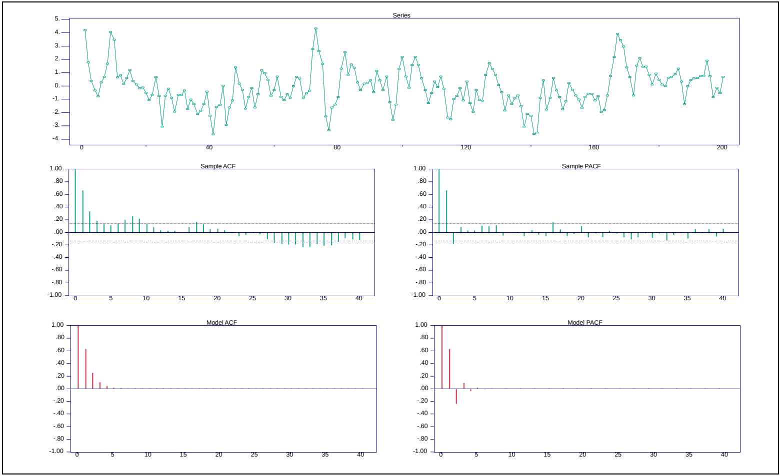
- ARMA(p,q)-prosessin autokovarianssifunktio on

$$\gamma_h = \begin{cases} \phi_1\gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{h-p} + \sigma^2 \sum_{j=h}^{q} \theta_j\psi_{j-h}, & 0 \leq h < \max\{p, q \\ \phi_1\gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{h-p}, & h \geq \max\{p, q+1\}, \end{cases}$$

  jossa $\theta_0 = 1$ ja summaus $\sum_{j=h}^{q}$ tulkitaan nollaksi, kun $h > q$.

- Koska kertoimet ψ_j voidaan lausua parametrien $\phi_1, \ldots, \phi_p$ ja $\theta_1, \ldots, \theta_q$ funktioina, voidaan autokovarianssit γ_h, $h \geq 0$, ratkaista näistä yhtälöistä soveltaen differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa käytettäviä menetelmiä (tähän palataan parametrien estimoinnin yhteydessä).
- Autokorrelaatiofunktio kaavalla $\rho_h = \gamma_h/\gamma_0$. Pätee $\rho_h \to 0$ eksponentiaalisesti, kun $h \to \infty$.

- Käännettävyysehto $\Rightarrow$ ARMA(p,q)-prosessi voidaan esittää AR(∞)-prosessina.
- Siis, kun q ≥ 1, ARMA(p,q)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktio käyttäytyy kuten MA(q)-prosessin tapauksessa ja pääpiirteissään samalla tavalla kuin autokorrelaatiofunktio.
- Yleisesti ARMA(p,q)-prosessilla ei ole katkosta autokorrelaatiofunktiossa eikä osittaisautokorrelaatiofunktiossa.



- Simuloitu 200 havainnon aikasarja ARMA(1,1)-prosessista

$$y_t = 0.4y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1}, \;\; \varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2).$$

$$\pi_1 = -0.84, \pi_2 = 0.27, \pi_3 = -0.09, \pi_4 = 0.03, \pi_5 = -0.01$$