

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Jos edellä oletetaan lisäksi, että y_t normaalinen, on otoskeskiarvo normaalisti jakautunut ja asymptoottisesti saadaan tulos

$$\sqrt{T} (\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} N \left(0, \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h \right) \quad \text{eli} \quad \bar{y} \underset{as}{\sim} N \left(\mu, \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h \right).$$

- Tämä voidaan perustella myös ilman y_t :n normalisuutta.
- Yleisesti tavanomainen suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause pätevät myös stationaarisille prosesseille "varsin yleisin oletuksin".
- Odotusarvoa μ koskevia testejä ja luottamusvälejä varten täytyy ääretön summa $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h$ estimoida. Sopiva estimaattori on

$$\sum_{h=-K}^K (1 - |h| / T) c_h,$$

jossa c_h on otosautokovarianssikerroin ja K on valittu "sopivasti" T :tä pienemmäksi (esimerkiksi $K \approx \sqrt{T}$).

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Otosautokorrelaatiokertoimien $r_h = c_h/c_0$ tilastollisten ominaisuuksien tarkastelu on monimutkaisempaa kuin otoskeskiarvon.
- Tarkentuvuus ja asymptoottinen normalisuus voidaan todeta "varsin yleisin oletuksin", mutta asymptoottisen jakauman varianssit ja kovarianssit ovat erikoistapauksia lukuun ottamatta käytännön kannalta hankalia.
- Tapauksessa $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ pätee (I_H ($H \times H$) yksikkömatriisi)

$$(r_1, \dots, r_H) \underset{as}{\sim} N(0, T^{-1} I_H).$$

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

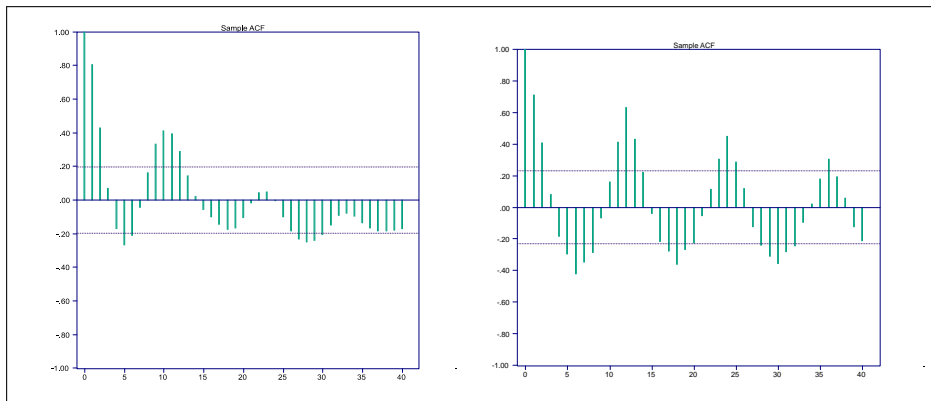
- Oletetaan nollahypoteesi $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$.
- Tällöin estimaattorit r_1, \dots, r_H ovat likimain riippumattomia ja $N(0, T^{-1})$ -jakautuneita, joten

$$P \left\{ |r_h| \geq 1.96 / \sqrt{T} \right\} \approx 0.05.$$

- Tätä voidaan käyttää yksittäisten otosautokorrelaatioiden suuruuden arvioimiseen (vrt. esim. Kuvio 2.1).
- Lisäksi voidaan muodostaa testisuure

$$Q = T \sum_{h=1}^H r_h^2 \underset{as}{\sim} \chi_H^2,$$

jonka suuret arvot ovat kriittisiä.



Kuvio 2.1. Auringonpilkkusarjan otosautokorrelaatiofunktio (vasemmalla) ja onnettomuussarjan otosautokorrelaatiofunktio (oikealla) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

- Yksittäinen estimaattori r_h kuuluu likimain 95%:n todennäköisyydellä kuvioihin piirrettyjen rajojen väliin, jos $\rho_h = 0$ kaikilla $h > 0$

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Ljungin ja Boxin ehdottaman modifioidun testisuureen

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{h=1}^H r_h^2 / (T-h) \underset{as}{\sim} \chi_H^2$$

jakauman on todettu olevan pienissä otoksissa lähempänä χ_H^2 -jakaumaa kuin alkuperäisen testisuureen Q jakauman.

- Kummankin testisuureen toimivuus edellyttää, ettei H ole kovin suuri suhteessa havaintojen lukumäärään T .

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Autokorrelaatiofunktio voi paljastaa vain lineaarisen riippuvuuden, mutta ei epälineaarisia riippuvuuksia (poikkeuksena normaaliset prosessit).
- Esimerkiksi prosessi (Esim. 2.2(ii))

$$y_t = \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad \omega > 0, \quad \alpha > 0,$$

on autokorreloimaton, mutta ei riippumaton.

- Jos oletetaan $E(y_t^4) < \infty$, nähdään tämä konkreettisesti laskemalla neliöidyn prosessin y_t^2 ensimmäinen autokovarianssikerroin, joka on nolasta poikkeava.

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Rajoitettuna testinä mahdollisen epälineaarisen riippuvuuden paljastamiseksi voidaan tutkia havaintojen neliöiden autokorreloituneisuutta.
- Jos $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ ja $E(y_t^4) < \infty$, voidaan autokorrelaatiota tutkia käyttäen neliöityjä havaintoja y_t^2 aivan kuten edellä. Erityisesti pätee

$$(r_1, \dots, r_H) \underset{as}{\sim} N(0, T^{-1}I_H)$$

ja Q - ja Q_{LB} -testisuureet toimivat kuten alkuperäisten havaintojen tapauksessa.

- Neliöityjen havaintojen autokorrelaatiot kiinnostavat erityisesti analysoitaessa finanssiaikasarjoja, jotka ovat itsessään usein lähes autokorreloimattomia.

- Määrittely-yhtälö

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

- tai kun $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$

$$\phi(B) y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

- Prosessin nykyisen arvon oletetaan siis riippuvan lineaarisesti p :n edellisen periodin arvosta ja ei-havaittavasta satunnaissokista tai virhetermistä (tai innovaatiosta) aivan kuten lineaarisessa mallissa.

AR(p)-prosessi

AR(p)-prosessin riittävä stationaarisuusehto

- Riittävä ehto AR(p)-prosessin

$$\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

stationaarisuudelle on, että polynomin

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \quad (z \in \mathbb{C})$$

juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella.

- Sama yhtäpitävästi:

$$\phi(z) \neq 0, \quad \text{kun} \quad |z| \leq 1.$$

AR(p)-prosessi

AR(p)-prosessin riittävä stationaarisuusehto

- $\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$
- $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0, \quad \text{kun } |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C})$
- Tällöin ($|\zeta_j| > 1$)
 - $(1 - \zeta_1^{-1}B) \dots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = \varepsilon_t$
 - $(1 - \zeta_2^{-1}B) \dots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = (1 - \zeta_1^{-1}B)^{-1} \varepsilon_t$
 - $(1 - \zeta_3^{-1}B) \dots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = (1 - \zeta_2^{-1}B)^{-1} (1 - \zeta_1^{-1}B)^{-1} \varepsilon_t$
 - \vdots
 - $y_t = (1 - \zeta_2^{-1}B)^{-1} \dots (1 - \zeta_1^{-1}B)^{-1} \varepsilon_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t,$

jossa oikealla aina station. lin. prosessi.

- Kun $\phi(z) \neq 0$, $|z| \leq 1$, voidaan AR(p)-prosessi

$$\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

kirjoittaa

$$y_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

jossa $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \phi(B)^{-1}$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.

- Kertoimet ψ_j voidaan ratkaista kertoimien ϕ_1, \dots, ϕ_p funktiona asettamalla B^j :n kertoimet samoiksi yhtälössä

$$\left(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p\right) \left(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots\right) = 1.$$

- Käytännössä oletus $E(y_t) = 0$ yleensä epärealistinen.
- Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan ottaa huomioon korvaamalla y_t prosessilla $y_t - \mu$, jolloin

$$\phi(B)(y_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

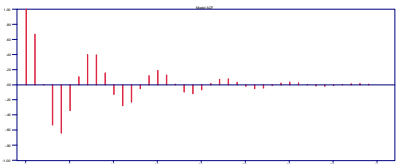
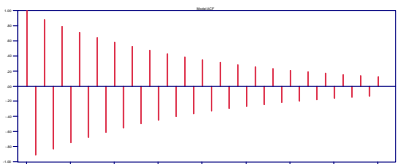
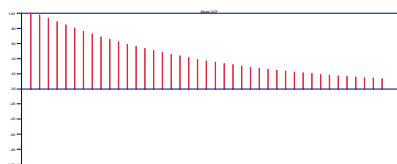
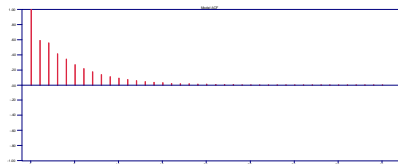
ja $E(y_t) = \mu$.

- Vaihtoehtoisesti,

$$\phi(B)y_t = v + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

jossa $v = \phi(B)\mu = \phi(1)\mu = \mu - \phi_1\mu - \dots - \phi_p\mu$

- Huom.: Ehdosta $\phi(z) \neq 0, |z| \leq 1$ seuraa, että $\phi(1) \neq 0$.



Kuvio 3.1. AR(2)-prosessin $(1 - \zeta_1^{-1}B)(1 - \zeta_2^{-1}B)y_t = \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, autokorrelaatiofunktioita ($h = 0, \dots, 40$). Käännetty juuret $\zeta_1^{-1} = 0.8$, $\zeta_2^{-1} = -0.4$ (vas. ylh), $\zeta_1^{-1} = 0.95$, $\zeta_2^{-1} = 0.3$ (oik. ylh.), $\zeta_1^{-1} = -0.95$, $\zeta_2^{-1} = 0.3$ (vas. alh.) ja $\zeta_1^{-1} = 1/(0.75 + 0.83i)$, $\zeta_2^{-1} = 1/(0.75 - 0.83i)$, $|\zeta_1^{-1}| = |\zeta_2^{-1}| = 0.89$ (oik. alh.).

- $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1}$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2}$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\rho} = \mathbf{P}\boldsymbol{\phi},$$

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p,$$

jossa $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \cdots \rho_p]'$, $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \cdots \phi_p]'$ ja $\mathbf{P} = [\rho_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p}$.

- Parametrivektorille $\boldsymbol{\phi}$ saadaan siten esitys

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma},$$

jossa $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \cdots \gamma_p]'$ ja $\boldsymbol{\Gamma} = [\gamma_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p} = \boldsymbol{\gamma}_0\mathbf{P}$

(matriisi $\boldsymbol{\Gamma}$ ja siten \mathbf{P} voidaan todeta kääntyväksi).