- MA(1)- tai MA(q)-prosessi on erikoistapaus yleisestä (ei-kausaalisesta) lineaarisesta prosessista

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right) \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty \tag{2.4}$$

- Ehto (2.4) takaa, että yhtälön (2.3) oikea puoli on hyvin määritelty osasummien jonon $\sum_{j=-n}^{n} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ kvadraattisena raja-arvona ($n \longrightarrow \infty$).
- Vahva stationaarisuus seuraa oletuksesta $\varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$ ja ominaisuudesta VS4
- Heikko stationaarisuus laskemalla $\text{E}\left(y_t\right)$, $\text{Var}\left(y_t\right)$ ja $\text{Cov}\left(y_t, y_{t+h}\right)$

Lineaarinen prosessi

Kausaalinen lineaarinen prosessi

- Erikoistapauksena saadaan kausaalinen lineaarinen prosessi:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

- Kuten ei-kausaalisessa tapauksessakin, havaittavan y_t:n ajatellaan syntyvän (mahdollisesti) äärettömän monen riippumattoman ja ei-havaittavan satunnaissokin painottuna summana.
- Erona ei-kausaaliseen tapaukseen on, että tulevat sokit ε_{t+j} $(j > 0)$ eivät vaikuta prosessin nykyiseen arvoon.
- Molemmissa tapauksissa kaukana nykyisyydestä olevien sokkien vaikutus on mitättömän pieni (koska $\psi_j \to 0$, kun $|j| \to \infty$).
- Useat käytännössä paljon käytetyt prosessit voidaan esittää (kausaalisina) lineaarisina prosesseina.

Lineaarinen prosessi

Toinen yksinkertainen erikoistapaus

- Oletetaan, että kausaalisessa lineaarisessa prosessissa

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right),$$

pätee $\psi_j = \phi^j$, jossa $|\phi| < 1$.

- Vaadittu ehto $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ täyttyy, sillä

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = 1/(1-\phi^2).$$

- Prosessi y_t voidaan määritellä myös käyttäen yhtälöä

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \quad |\phi| < 1. \tag{2.6}$$

- Näin määriteltyä prosessia kutsutaan *ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi prosessiksi* eli AR(1) prosessiksi.
- Ilmeinen yleistys AR(p)-prosessi

- AR(1)-prosessin tavallisesti käytetty määrittely

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \quad |\phi| < 1. \tag{2.6}$$

osoittaa, että prosessin nykyinen arvo riippuu lineaarisesti edellisen periodin arvosta ja ei-havaittavasta satunnaissokista tai virhetermistä aivan kuten lineaarisessa mallissa.

- Tässä ehdon $|\phi| < 1$ tarpeellisuus nähdään johtamalla yhtälöstä (2.6) peräkkäisillä sijoituksilla yhtälö

$$y_t = \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}.$$

- Kun $|\phi| < 1$, johtaa tämä stationaariseen ratkaisuun $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$.

Lineaarinen prossessi

Toinen yksinkertainen erikoistapaus

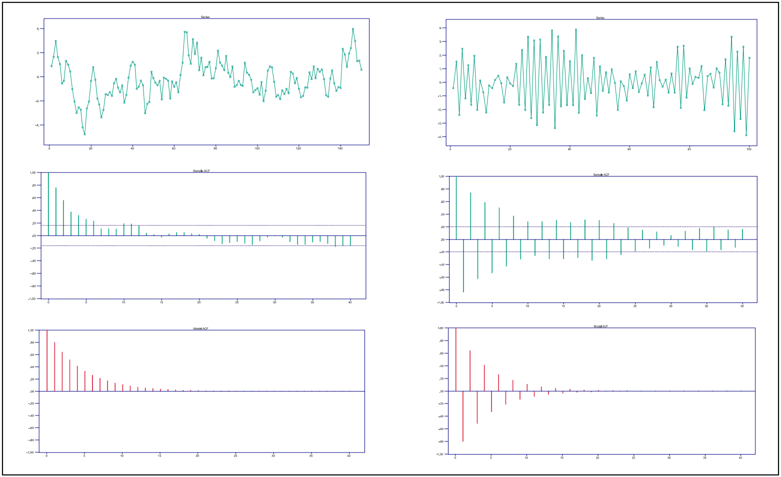
- AR(1)-prosessin lineaarisesta esityksestä

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right), \quad |\phi| < 1,$$

  saadaan laskemalla
  - $\mathrm{E}\left(y_t\right) = 0$,
  - $\mathrm{Var}\left(y_t\right) = \sigma^2 / \left(1 - \phi^2\right)$
  - $\mathrm{Cov}\left(y_t, y_{t+h}\right) = \sigma^2 \phi^h / \left(1 - \phi^2\right)$.
- Autokorrelaatiofunktio on näin ollen

$$\rho_h = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \phi^h, & h > 0. \end{cases}$$

- Toisin kuin MA(1)-prosessilla on autokorrelaatiofunktio nollasta poikkeava kaikilla viipymillä (ellei $\phi = 0$).
- Ehto $\gamma_h \to 0$, kun $h \to \infty$, kuitenkin täyttyy.



Kuvio 2.3. Kaksi AR(1)-prosessista $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, 1)$, simuloitua aikasarjaa ($T = 150$), niiden otosautokorrelaatiofunktiot (keskellä) ja teoreettiset autokorrekaatiofunktiot (alinna) viipymillä $h = 0, ..., 40$. Vasemmalla $\phi = 0.8$ ja oikealla $\phi = -0.8$.

Lineaarinen prosessi
Toinen yksinkertainen erikoistapaus

- Ehto $|\phi| < 1$ takaa, että (stokastisella) differenssiyhtälöllä

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$$

on stationaarinen ratkaisu $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$.

- Tämä ehto ei kuitenkaan ole välttämätön stationaarisen ratkaisun olemassaololle.

- Ehdon $|\phi| > 1$ voimassaollessa saadaan myös stationaarinen ratkaisu

$$y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} \varepsilon_{t+j},$$

joka aikaisemmasta (kausaalisesta) ratkaisusta poiketen on ei-kausaalinen.

- AR(1)-prosessilla

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$$

on stationaarinen ratkaisu, kun $|\phi| < 1$ tai $|\phi| > 1$ eli kun $|\phi| \neq 1$.

- Kun $|\phi| = 1$, ei stationaarista ratkaisua ole.
- Kun määrittely-yhtälössä aikaindeksi rajoitetaan positiiviseksi, voidaan kuitenkin määritellä AR(1)-prosessi

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$$

kaikilla $\phi \in \mathbb{R}$ ja millä tahansa alkuarvolla y_0.

- Tarkastellaan "yleistä" AR(1)-prosessia

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ..., \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

- Peräkkäisillä sijoituksilla nähdään, että kaikilla $\phi \in \mathbb{R}$

$$y_t = \phi^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \quad t = 1, 2, \ldots .$$

- Kun $y_0 \perp\!\!\!\perp \{\varepsilon_t, t \geq 1\}$, saadaan tästä laskelmalla

$$\mathrm{E}\left(y_t\right) = \phi^t \mathrm{E}\left(y_0\right) \quad \text{ja} \quad \mathrm{Var}\left(y_t\right) = \phi^{2t} \mathrm{Var}\left(y_0\right) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j},$$

mikä osoittaa epästationaarisuuden tapauksessa $|\phi| = 1$.

- "Yleisen" AR(1)-prosessin (epästationaarista) erikoistapausta

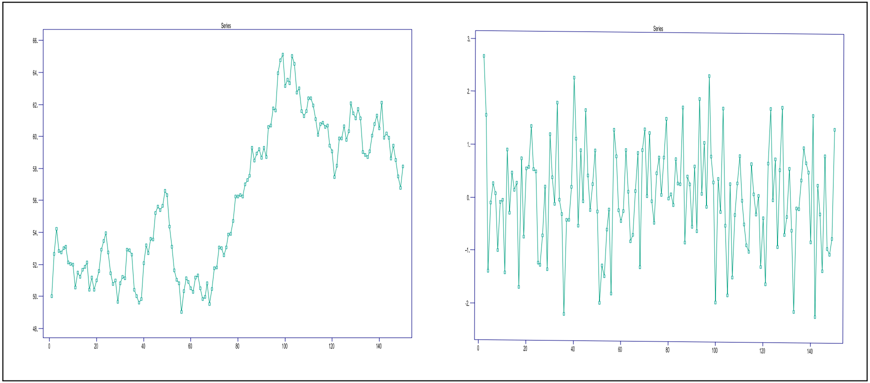
$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ..., \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right),$$

sanotaan *satunnaiskuluksi*.

- Satunnaiskululle saadaan myös esitys

$$y_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}.$$

- Nähdään, että satunnaiskulun differenssit $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$ ovat stationaarisia ja sama pätee yleisesti, kun edellä ε_t on stationaarinen.
- Satunnaiskululla ja sen yleistyksillä on keskeinen asema epästationaaristen aikasarjojen analysoinnissa.



Kuvio 2.4. Satunnaiskulusta simuloitu 150:n havainnon realisaatio (vasemmalla) ja sen differenssi (oikealla), kun $\varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, 1)$.

- Määritellään mille tahansa prosessille (tai lukujonolle) x_t operaatio

$$Bx_t = x_{t-1}.$$

- Yleistetään tämä induktiivisesti $B^2 x_t = B\left(Bx_t\right) = Bx_{t-1} = x_{t-2}$ ja

$$B^k x_t = B\left(B^{k-1} x_t\right) = x_{t-k}, \quad B^0 x_t = x_t.$$

- Tapauksessa $k < 0$ prosessia edistetään eli $B^{-1} x_t = x_{t+1}$, $B^{-2} x_t = x_{t+2}$ jne.
- Viivästysoperaattoria käyttäen voidaan määritellä polynomeja ja sarjoja kuten

$$\theta\left(B\right) = 1 + \theta B \quad \text{ja} \quad \psi\left(B\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$$

ja operoida niillä aivan kuten B:n ollessa reaali- tai kompleksiluku.

Lineaarinen prosessi

Viivästysoperaattorin B käyttö

- Lineaarinen prosessi voidaan määritellä yhtälöllä

$$y_t = \psi(B)\,\varepsilon_t, \quad \psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right).$$

- Operaattori $\psi(B)$ ajatellaan usein *lineaariseksi suotimeksi*, joka suorittaan muunnoksen $\{\varepsilon_t\} \to \{y_t\}$.
- Erityisesti kausaalisessa tapauksessa $\psi_j = 0$, $j < 0$, sanotaan valkoista kohinaa ε_t tähän liittyen usein prosessin y_t *innovaatioksi*.
- Tärkeä erikoistapaus: $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \theta(B)/\phi(B)$, jossa $\phi(B)$ ja $\theta(B)$ ovat (äärellisasteisia) polynomeja ja

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t.$$

- Esimerkiksi, kun $\theta(B) = 1 + \theta B$ ja $\phi(B) = 1 - \phi B$, $|\phi| < 1$,

$$y_t = \frac{1 + \theta B}{1 - \phi B} \varepsilon_t .$$

- Kertomalla tässä puolittain $(1 - \phi B)$:llä saadaan

$$(1 - \phi B) y_t = (1 + \theta B)\, \varepsilon_t \qquad \text{tai}$$

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right) . \tag{2.7}$$

- Näin määriteltyä prosessia sanotaan *ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi-liukuvan keskiarvon prosessiksi* eli ARMA(1,1)-prosessiksi.
- Ilmeinen yleistys ARMA(p,q)-prosessi

- Kun $|\phi| < 1$, saadaan yhtälöstä

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right). \tag{2.7}$$

kuten AR(1)-tapauksessa peräkkäisiä sijoituksia käyttäen, että y_t:llä on kausaalinen lineaarinen esitys

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

- Formaalisti:

$$(1 - \phi B) y_t = (1 + \theta B) \varepsilon_t \quad \Big| \quad (1 - \phi B)^{-1}.$$

- $\Longrightarrow$

$$y_t = \frac{1 + \theta B}{1 - \phi B} \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t, \quad \psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \frac{1 + \theta B}{1 - \phi B}.$$

Woldin hajotelma

Esimerkki

- Tarkastellaan heikosti stationaarista prosessia (Esimerkki 2.1(ii))

$$y_t = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \lambda \in [0, \pi) \quad \text{(vakio)},$$

$$\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0, \ \ \mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B) = \sigma^2 \ \text{ ja } \ \mathrm{Cov}(A, B) = 0.$$

- y_t:n määrittely-yhtälöstä seuraa

$$y_t + y_{t-2} = A[\cos(\lambda t) + \cos(\lambda(t-2))] + B[\sin(\lambda t) + \sin(\lambda(t-2))]$$

  - jossa oikea puoli $= 2\cos(\lambda)\, y_{t-1}$ (sinin ja kosini summakaavat!).
  - Pätee siis

$$y_t = 2\cos(\lambda)\, y_{t-1} - y_{t-2}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

- Ts., kun y_{t-1} ja y_{t-2} (ja λ:n arvo) tunnetaan, voidaan y_t:n arvo ennustaa ilman minkäänlaista ennustevirhettä.
- Tällaista prosessia sanotaan *deterministiseksi*.

Woldin hajotelma

- Edellä tarkastellun deterministisen prosessin

$$y_t = 2\cos(\lambda)\, y_{t-1} - y_{t-2}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

yleistys:

- Tarkastellaan y_t:n ennustetta, joka on mikä tahansa prosessin aikaisempien arvojen $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ *lineaarinen* funktio.
- Ts., ennuste on muuttujien $y_{t-1}, ..., y_{t-n}$ lineaarikombinaatio tai tällaisten kvadraattinen raja-arvo, kun $n \to \infty$.
- Prosessia y_t sanotaan *deterministiseksi*, jos y_t:n arvo voidaan ennustaa (arvojen $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ lineaarisen funktion avulla) ilman minkäänlaista ennustevirhettä kaikilla t.
- Jos prosessi ei ole deterministinen, sitä sanotaan *ei-deterministiseksi.*

Woldin hajotelma

- Jokaisella *heikosti stationaarisella* ei-deterministisellä prosessilla y_t $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ on esitys

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \upsilon_t,$$

(i) $\psi_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$

(ii) $\varepsilon_t \sim \text{wn}\left(0, \sigma^2\right)$ on satunnaismuuttujien y_t, $y_{t-1}, \ldots$ lineaarikombinaatioiden kvadraattinen raja-arvo

(iii) υ_t on deterministinen eli voidaan ennustaa lineaarisesti satunnaismuuttujien $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$ avulla ilman virhettä

(iv) $\text{Cov}\left(\varepsilon_t, \upsilon_s\right) = 0$ kaikilla t ja s.

Woldin hajotelma

- Woldin hajotelma osoittaa, että jokainen heikosti stationaarinen ei-deterministinen prosessi voidaan esittää deterministisen prosessin ja kausaalisen MA(∞)-prosessin summana

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \upsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ heikkoa, mutta ei vahvaa, valkoista kohinaa.}$$

- Kun havaitaan vain yksi realisaatio, voidaan deterministinen osa υ_t tulkita ei-satunnaiseksi ja sisällyttää y_t:n odotusarvoon.
- Jatkossa oletetaan yleensä, ettei determistisiä termejä ole, jolloin

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \psi(B)\,\varepsilon_t$$

  ja $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ on rationaalinen, kun $y_t \sim$ ARMA.
- ARMA-prosessien voidaan odottaa pystyvän kuvaamaan hyvin heikosti stationaarisia prosesseja. On kuitenkin syytä huomata, että ...

Woldin hajotelma

- **Huom.:** Woldin hajotelma

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \upsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{wn}\left(0, \sigma^2\right), \quad \upsilon_t \text{ deterministinen}$$

  koskee vain *heikosti stationaarisia prosesseja* ja *lineaarista ennustamista*.
- On olemassa vahvasti stationaarisia prosesseja, joilla lineaarinen ennustaminen ei ole (keskineliövirheen mielessä) optimaalista.
- Tällaisilla prosesseilla Woldin hajotelmassa esiintyvä lineaarinen ennustevirhe ε_t ei ole riippumation (eli $\mathrm{iid}(0, \sigma^2)$), vaikka se onkin autokorreloimaton (eli $\mathrm{wn}(0, \sigma^2)$).
- Optimaalisen ennusteen ennustevirhe on riippumaton, joten lineaarinen ennustaminen perustuu malliin, joka ei ota kaikkia prosessin satunnaispiirteitä huomioon.

Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Otoskeskiarvolle $\bar{y} = T^{-1}(y_1 + \cdots + y_T)$ pätee $\mathrm{E}(\bar{y}) = \mu$ eli se on odotusarvon $\mu = \mathrm{E}(y_t)$ *harhaton estimaattori*.
- Lasketaan seuraavaksi

$$\mathrm{Var}(\bar{y}) = \frac{1}{T}\sum_{h=-T}^{T}\left(1 - \frac{|h|}{T}\right)\gamma_h.$$

- Kun oletetaan $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma_h| < \infty$, saadaan ... tulos

$$\mathrm{Var}(\bar{y}) = \mathrm{E}(\bar{y} - \mu)^2 \leq \frac{1}{T}\sum_{h=-T}^{T}|\gamma_h| \to 0, \quad \text{kun} \quad T \to \infty.$$

- Siis, otoskeskiarvo on (Markovin epäyhtälön perusteella) odotusarvon *tarkentuva estimaattori*.

$T^2 \mathrm{Var}(\bar{y}) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} \mathrm{Cov}(y_t, y_s)$ on $T \times T$ matriisin

$$
\mathrm{Cov}(y_1, ..., y_T) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{t-s} & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_{-1} & \gamma_0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \gamma_{t-s} \\ \gamma_{s-t} & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \gamma_1 \\ \gamma_{T-1} & \cdots & \gamma_{s-t} & \cdots & \gamma_{-1} & \gamma_0 \end{bmatrix},
$$

kaikkien alkioiden summa eli yhtä kuin

$$
\begin{aligned}
& T\gamma_0 + (T-1)\gamma_1 + \cdots + \gamma_{T-1} \\
& \quad + (T-1)\gamma_{-1} + \cdots + \gamma_{-(T-1)} \\
= & \sum_{h=-T}^{T} (T - |h|)\gamma_h
\end{aligned}
$$