

- Vaikka normaalisuusoletus ei pätisikään, voidaan virheelliseen normaaliseen uskottavuusfunktioon perustuvalle estimaattorille  $\hat{\delta}$  johtaa yleisin oletuksin tulos

$$\hat{\delta}_{as} \sim N \left( \delta, \mathbf{V}(\delta)^{-1} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{V}(\delta)^{-1} \right),$$

jossa

$$\mathbf{B}(\delta) = E \left[ \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial}{\partial \delta} \tilde{l}_t(\delta) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \delta} \tilde{l}_t(\delta) \right)' \right],$$

ja  $\tilde{l}_t(\delta)$  on havainnon  $y_t$  log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\delta) = -\frac{1}{2} \log h_t(\delta) - \frac{y_t^2}{2h_t(\delta)}.$$

- Jos normaalisuusoletus pätee, pätee yleisen uskottavuusteorian mukainen tulos  $\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{V}(\delta)$ .

$$\hat{\delta}_{as} \sim N \left( \delta, \mathbf{V}(\delta)^{-1} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{V}(\delta)^{-1} \right), \quad (**)$$

- Käyttäen matriisien  $\mathbf{V}(\delta)$  ja  $\mathbf{B}(\delta)$  empiirisiä vastineita

$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta}) = -\partial^2 \tilde{l}(\hat{\delta}) / \partial \delta \partial \delta'$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\delta}) = \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial}{\partial \delta} \tilde{l}_t(\hat{\delta}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \delta} \tilde{l}_t(\hat{\delta}) \right)'$$

voidaan tulokseen (\*\*\*) perustaa Waldin testin tyyppisiä testejä tilastollisen päättelyn kurssilla esitetyllä tavalla.

- Erityisesti matriisin  $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta})^{-1} \hat{\mathbf{B}}(\hat{\delta}) \hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta})^{-1}$  diagonaali-alkioiden neliöjuuria voidaan käyttää  $\hat{\delta}$ :n komponenttien likimääräisinä keskivirheinä.

- Jos normaalisuusoletus  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$  pätee, pätee

$$\hat{\delta}_{as} \sim N\left(\delta, \mathbf{V}(\delta)^{-1} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{V}(\delta)^{-1}\right), \quad \mathbf{B}(\delta) = \mathbf{V}(\delta).$$

- Tällöin voidaan Waldin testi ja keskivirheet muodostaa tavanomaiseen tapaan eli valita

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\delta}) = \hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta}) = -\partial^2 \hat{\ell}(\hat{\delta}) / \partial \delta \partial \delta'$$

ja myös uskottavuusosamäärätestiä voidaan käyttää tavanomaiseen tapaan.

- Jos normaalisuusoletus ei päde, ei uskottavuusosamäärätestin tavanomainen asymptoottinen  $\chi^2$ -jakauma kuitenkaan päde.

- Edellä mainittujen testimenetelmien käyttöä rajoittaa se, etteivät ne toimi (välttämättä), jos hypoteesi rajoittaa jonkun GARCH( $r,s$ )-mallin parametreista  $\beta_1, \dots, \beta_r$  tai  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  nolllaksi.
- Näin käy, kun ehdon  $h_t > 0$  takaamiseksi vaaditaan  $\beta_i \geq 0$  ja  $\alpha_i \geq 0$ , sillä (esim.) tavanomainen uskottavuuspohjainen testiteoria ei salli parametrien sijaitsevan parametriavaruuden reunalla. GARCH(1,1)-mallissa ehto  $\beta_1 \geq 0$  ja  $\alpha_1 \geq 0$  on välttämätön.
- Vaikka ehto  $\beta_i \geq 0$  ja  $\alpha_i \geq 0$  ei olekaan välttämätön, kun  $r > 1$  tai  $s > 1$ , voi käytettävä estimointialgoritmi olettaa sen, jolloin testit eivät toimi tavanomaisella tavalla ja testitulokset on tulkittava suuntaa-antavina
- Edellä todettu on pätee myös seuraavissa testeihin liittyvissä tarkasteluissa.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## GARCH-mallien parametrien estimointi

- Esitetyt asymptoottiset tulokset voidaan osoittaa päteväksi siinäkin tapauksessa, että heikon stationaarisuuden ehto ei päde eikä  $h_t$ :tä voida siten tulkita ehdolliseksi varianssiksi.
- Esimerkiksi GARCH(1,1)-mallissa voi olla  $\alpha + \beta \geq 1$ , kunhan  $E[\log(\beta + \alpha \varepsilon_t^2)] < 0$  pätee. Näin saattaa käydä joissakin vahvasti heteroskedastisissa tapauksissa.
- Vaikka  $h_t$  ei olisikaan ehdollinen varianssi, on yhtälön  $y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$  perusteella selvää, että se kuvaa havaitussa aikasarjassa ilmenevää "volatiilisuutta".

- Tarkastellaan yleistä mallia

$$y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1),$$

- Ei-normaalista jakaumista yleisimmin käytetty lienee t-jakauma, jonka vapausasteluku on reaalinen ja joka standardoidaan siten, että  $E(\varepsilon_t^2) = 1$  pätee.
- Tällöin  $\varepsilon_t$ :n tiheysfunktio on

$$t(\varepsilon_t; \eta) = \frac{\Gamma((\eta + 1)/2)}{\sqrt{\pi(\eta - 2)}\Gamma(\eta/2)} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\eta - 2}\right)^{-(\eta+1)/2},$$

jossa  $\Gamma(\cdot)$  on gammafunktio ja reaalinen (ja tuntematon) vapausasteluku  $\eta > 2$  ( $\eta > 4$ , jos  $E(\varepsilon_t^4) < \infty$  halutaan).

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## GARCH-mallien parametrien estimointi

- Kuten normaalijakauman tapauksessa perustetaan uskottavuusfunktio ehdolliseen tiheysfunktioon (tämän aikaisempi johto ei vaatinut normaalijakaumaa)

$$f_{\mathbf{Y}_T} / f_{\mathbf{Y}_0} = \prod_{t=1}^T f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}}$$

- Satunnaismuuttujan  $y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$  ehdollinen tiheysfunktio ehdolla  $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$  on nyt  $h_t^{-1/2} t(y_t / h_t^{1/2}; \eta)$  eli

$$f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}} = h_t^{-1/2} t(y_t / h_t^{1/2}; \eta),$$

joten (approksimatiiviseksi) log-uskottavuusfunktioiksi saadaan

$$\tilde{l}(\delta; \eta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t(\delta) + \sum_{t=1}^T \log t(y_t / h_t^{1/2}(\delta); \eta),$$

- Jos t-jakaumaoletus on oikea ja  $\boldsymbol{\vartheta} = (\delta, \eta)$ , pätee SU-estimaattorille  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\delta}, \hat{\eta})$

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} N\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\right),$$

jossa  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = E\left[-\partial^2 \tilde{l}(\boldsymbol{\vartheta}) / \partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}'\right]$ .

- Käyttäen matriisin  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})$  empiiristä vastinetta

$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \left[-\partial^2 \tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) / \partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}'\right]$$

voidaan muodostaa Waldin testejä tavanomaiseen tapaan.

- Erityisesti matriisin  $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})^{-1}$  diagonaali-alkioiden neliöjuuria voidaan käyttää estimaattorin  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$  komponenttien likimääräisinä keskivirheinä.



- Jos t-jakauma oletus on virheellinen, voidaan käyttää tulosta

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{as} \sim N \left( \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \right),$$

jossa

$$E \left[ \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) \right)' \right],$$

ja  $\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})$  on havainnon  $y_t$  log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{1}{2} \log h_t(\boldsymbol{\vartheta}) + \log t(y_t / h_t^{1/2}(\boldsymbol{\vartheta}); \eta).$$

- Keskiarvot ja Waldin testit käyttäen matriiseja  $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$  ja

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \right)'.$$

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Mallin riittävyyden tarkistaminen

- Kun mallin parametrit on estimoitu, on syytä tutkia estimoidun mallin riittävyyttä samaan tapaan kuin ARMA-malleissakin.
- Residuaalien  $\hat{\varepsilon}_t = y_t / \hat{h}_t^{1/2}$  aikasarja on hyvä piirtää ja tutkia havaitaanko poikkeamia tehdyistä oletuksista.
- Tehdyn jakaumaoletuksen realistisuutta voidaan tutkia residuaalien histogrammin avulla tavanomaiseen tapaan.
- Usein residuaalien jakauman on havaittu olevan huipukkaampi ja paksuhäntäisempi kuin normaalijakauma.
- Estimoidun mallin kykyä kuvata sarjan ehdollista heteroskedastisuutta voidaan tutkia neliöityjen residuaalien  $\hat{\varepsilon}_t^2$  otosautokorrelaatiofunktion avulla. "Tavanomainen" kriittinen raja  $1.96 / \sqrt{T}$  ei ole kuitenkaan (edes asympotoottisesti) pätevä.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Mallin riittävyyden tarkistaminen

- Residuaaleista  $\hat{\varepsilon}_t$  lasketun McLeodin ja Lin testisuureen asymptoottinen jakauma ei myöskään ole "tavanomainen"  $\chi^2$ -jakauma.
- Saman tyyppisiä testejä on kehitetty ja liitetty myös joihinkin yleisesti käytössä oleviin ohjelmistoihin.
- Valitun mallin riittävyyttä voidaan tutkia myös estimoimalla laajempia vaihtoehtoja. Esimerkiksi usein esiintyvän GARCH(1,1)-mallin tapauksessa voidaan estimoida GARCH(2,1)- ja GARCH(1,2)-mallit ja tutkia lisäparametrien tarpeellisuutta.
- Edellisessä on kuitenkin syytä muistaa testien "reunapisteongelma" ja että GARCH(1,1)-mallin ollessa oikea ei testi GARCH(2,2)-mallia vastaan toimi tavanomaiseen tapaan, koska nollahypoteesin voimassa ollessa GARCH(2,2)-mallin parametrit eivät ole identifioituvia.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Mallin riittävyyden tarkistaminen

- Eri malleja voidaan verrata mallinvalintakriteerejä käyttäen ilman testeissä ilmeneviä tulkintahankaluuksia.
- Kriteerifunktio on normaalisen GARCH( $r,s$ )-mallin tapauksessa

$$C(r, s) = -\frac{2}{T}\tilde{l}(\hat{\delta}) + (r + s + 1)g(T) / T,$$

jossa sakkofunktio  $g(\cdot)$  on positiivinen ja  $g(T) / T \rightarrow 0$ , kun  $T \rightarrow \infty$ . Esimerkiksi

$$\text{AIC: } g(T) = 2 \quad (\text{Akaike, 1974})$$

$$\text{HQ: } g(T) = 2 \log(\log T) \quad (\text{Hannan ja Quinn, 1979})$$

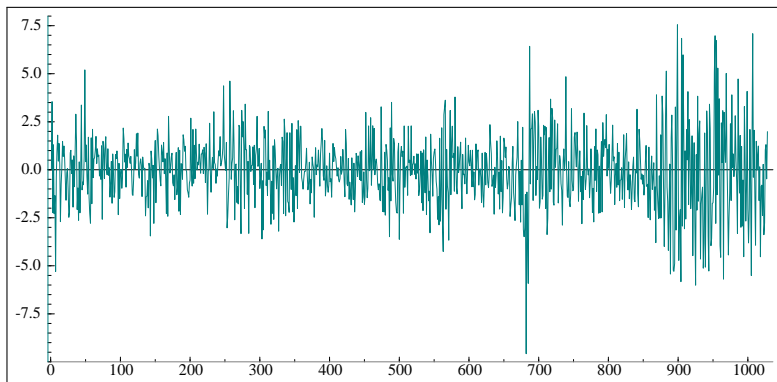
$$\text{BIC: } g(T) = \log T \quad (\text{Schwarz, 1978, Rissanen, 1978}).$$

- $t$ -jakaumaa käytettäessä kriteerifunktio on

$$C(r, s) = -\frac{2}{T}\tilde{l}(\hat{\delta}, \hat{\eta}) + (r + s + 1)g(T) / T,$$

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki

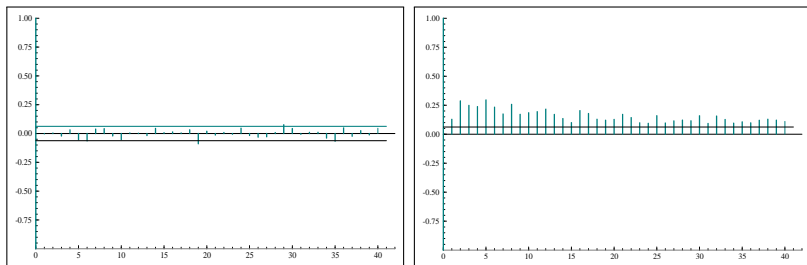


**Kuvio 5.1(i).** Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotot ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003. Tuotot on laskettu kaavalla

$y_t = 100 (\log P_t - \log P_{t-1})$ , jossa  $P_t$  on indeksin arvo päivänä  $t$ .

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki



**Kuvio 5.1(ii).** Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotoista ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003 laskettu otosautokorrelaatiofunktio (vas.) ja nelöiden otosautokorrelaatiofunktio (oik.) viipymillä  $h = 1, \dots, 40$ .

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki

- Normaalijakaumaan perustuvan GARCH(1,1)-mallin SU-estimointi tuottaa DAX-indeksin päivätuottosarjalle ( $T = 1028$ ) estimoiduksi ehdolliseksi varianssiksi

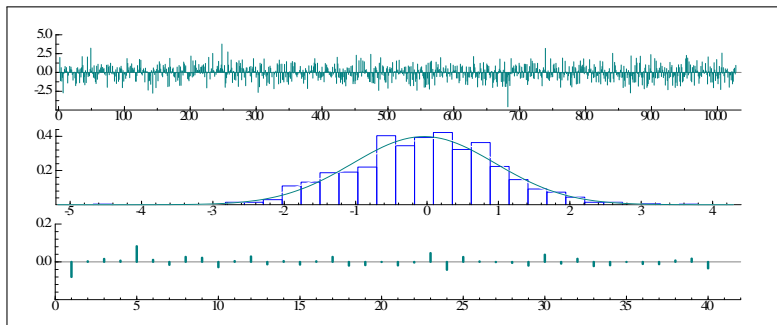
$$h_t = \underset{\substack{(0.025) \\ [0.023]}}{0.062} + \underset{\substack{(0.020) \\ [0.021]}}{0.887} h_{t-1} + \underset{\substack{(0.017) \\ [0.020]}}{0.094} y_{t-1}^2, \quad (5.13)$$

jossa tavallisissa suluissa on "tavanomaiset" keskivirheet ja hakasuluissa ns. "robustit" keskivirheet.

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0.981$ , mikä osoittaa voimakasta riippuvuutta ehdollisessa varianssissa.
- Heikon stationaarisuuden ehto  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} < 1$  toteutuu kuitenkin.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki



- DAX-sarjaan sovitetun GARCH(1,1)-mallin (5.13) residuaalisarja (ylh.), sen histogrammi ja  $N(0, 1)$ -jakauman tiheysfunktio (kesk.) sekä neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio viipymillä  $h = 1, \dots, 40$  (alh.).
- Neliöityjen residuaalien ensimmäinen ja viides autokorrelaatio  $\approx 0.08$  ( $1.96 / \sqrt{1028} \approx 0.06$ ).



# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki

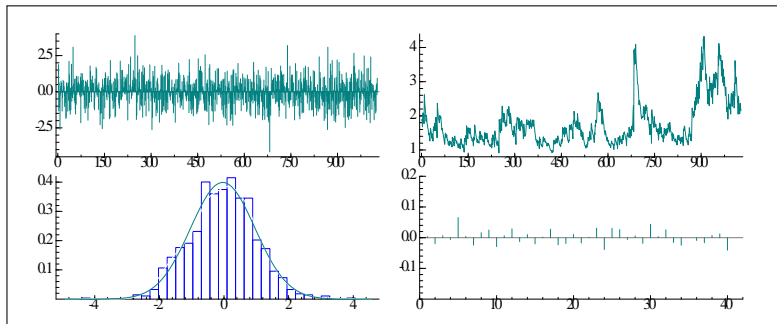
- GARCH(2,1)- ja GARCH(1,2)-malleista osoittautui jälkimmäinen sopivammaksi mm. mallinvalintakriteerien mukaan.
- Normaalijakaumaan perustuvaa SU-estimointi  $\Rightarrow$

$$h_t = \underset{\substack{(0.032) \\ [0.033]}}{0.086} + \underset{\substack{(0.026) \\ [0.032]}}{0.855} h_{t-1} - \underset{\substack{(0.029) \\ [0.032]}}{0.027} y_{t-1}^2 + \underset{\substack{(0.034) \\ [0.042]}}{0.146} y_{t-2}^2. \quad (5.14)$$

- Tässä  $\hat{\alpha}_1 < 0$ , mutta estimaatit toteuttavat kuitenkin ehdollisen varianssin positiivisuuden takaavat ehdot  $\omega > 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$  ja  $\beta_1 \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ .
- Heikon stationaarisuuden ehto on (jälleen) niukasti voimassa, sillä polynomin  $1 - \hat{\beta}(z) - \hat{\alpha}(z)$  juuret ovat  $-6.69$  ja  $1.02$ .

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki



- DAX-sarjaan sovitetun GARCH(1,2)-mallin (5.14) residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja  $N(0, 1)$ -jakuman tiheysfunktio (alh. vas.), neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio viipymillä  $h = 1, \dots, 40$  (alh. oik.) ja estimoitu ehdollinen hajonta  $\hat{h}_t^{1/2}$  (ylh. oik.).
- Neliöityjen residuaalien ensimmäinen autokorrelaatio  $\approx 0.003$  viides  $\approx 0.066$  ( $1.96/\sqrt{1028} \approx 0.06$ ).

- Kun AR(p)-mallin virheen oletetaan oleva ehdollisesti heteroskedastinen, saadaan malli

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1),$$

$$h_t = h(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) \text{ ja } \varepsilon_t \perp\!\!\!\perp (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$$

- Viimeisestä seuraa  $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp (u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$  ja siten  $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp h_t$ .
- Kertoimien  $\phi_1, \dots, \phi_p$  oletetaan toteuttavan (riittävä) stationaarisuusehto  $1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0, |z| \leq 1$ .
- Ehdolliselle varianssille oletetaan GARCH(r,s)-malli

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_s u_{t-s}^2,$$

jonka parametrit toteuttavat identifioituvuusehdon ja (ainakin vahvan) stationaarisuuden vaatiman ehdon.

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$$

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s u_{t-s}^2$$

- Oletuksista saadaan tulokset  $[E_t(\cdot) = E_t(\cdot \mid y_s, s \leq t)]$

$$E_{t-1}(y_t) = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} \quad \text{ja} \quad \text{Var}_{t-1}(y_t) = h_t,$$

jotka osoittavat prosessin ehdollisen odotusarvon ja varianssin riippuvan prosessin menneisyydestä.

- Tarkastellaan prosessin tulevien arvojen  $y_{t+k}$ ,  $k \geq 1$  ennustamista ajankohtana  $t$ , kun oletetaan stationaarisuus ja  $E(y_t^2) < \infty$ .
- Kun  $k \geq 2$ , nähdään kuten jaksossa 5.7, että

$$E_t(u_{t+k}) = E_t [E_{t+k-1}(u_{t+k})] = 0,$$

joten (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen ennuste toteuttaa

$$E_t(y_{t+k}) = \phi_1 E_t(y_{t+k-1}) + \dots + \phi_p E_t(y_{t+k-p}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

jossa  $E_t(y_{t+k-j}) = y_{t+k-j}$ , kun  $j \geq k$ .

- Siis, ennusteet voidaan muodostaa rekursiivisesti aivan samalla tavalla kuin homoskedastisessa AR(p)-tapauksessa.

- Ennustevirhe

$$y_{t+k} - E_t(y_{t+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j u_{t+k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j h_{t+k-j}^{1/2} \varepsilon_{t+k-j},$$

- Yhden askeleen ennustevirheen ehdolliselle odotusarvolle ja varianssille pätee

$$E_t [y_{t+1} - E_t(y_{t+1})] = E_t(u_{t+1}) = 0$$

ja

$$E_t [y_{t+1} - E_t(y_{t+1})]^2 = E_t(u_{t+1}^2) = h_{t+1}.$$

- Siis, yhden askeleen ennustevirhe on ehdollisesti heteroskedastinen eli ennustetarkkuus riippuu siitä millaisia arvoja prosessi on saanut ennusteaikakohtana ja ennen sitä.
- Ennustevirheen lausekkeesta nähdään, että sama pätee myös ennustettaessa yhtä askelta pidemmälle.

- Jos  $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$ , niin yhden askeleen ennustevirheelle pätee tulos

$$y_{t+1} - E_t(y_{t+1}) | \{y_{t-j}, j \geq 0\} \sim N(0, h_{t+1}),$$

jonka avulla voidaan yhden askeleen ennusteelle muodostaa (ehdollisia) luottamusrajoja aivan kuten homoskedastisessa ARMA-tapauksessa.

- Usean askeleen ennusteiden luottamusrajoja ei kuitenkaan voida muodostaa yhtä helposti, sillä usean askeleen ennustevirheen ehdollinen jakauma ei ole normaalin eikä sille voida johtaa yksinkertaista esitystä.
- Ehdollisen varianssin ennustaminen sujuu samalla tavalla kuin jaksossa 5.7, jossa  $E_{t-1}(y_t) = 0$ , kunhan aikaisemmissa tarkasteluissa prosessi  $y_t$  korvataan prosessilla  $u_t = y_t - E_t(y_t)$ .

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Parametrien estimointi

- Olettaen  $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$  voidaan ehdollinen uskottavuusfunktio johtaa käyttäen samaa periaatetta kuin GARCH-malleilla.
- Jos  $\mathbf{Y}_{t-1} = (\mathbf{Y}_0, y_1, \dots, y_{t-1})$ , niin kuten GARCH-malleilla

$$\prod_{t=1}^T f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}} = (2\pi)^{-T/2} \cdot \prod_{t=1}^T h_t^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{u_t^2}{h_t} \right\},$$

jossa  $u_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p}$ .

- Log-uskottavuusfunktioiksi saadaan siten

$$\tilde{l}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{u_t(\boldsymbol{\phi})^2}{h_t(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta})},$$

jossa  $u_t(\boldsymbol{\phi}) = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p}$ ,  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$  ja  $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r)$



# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Parametrien estimointi

Jos  $\tilde{l}(\boldsymbol{\phi}, \delta)$  maksimoituu pisteessä  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\delta})$ , pätee ilman normaalisuusoletustakin

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} N\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\right),$$

jossa

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = E\left[-\partial^2 \tilde{l}(\boldsymbol{\vartheta}) / \partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}'\right] = E\left[-\sum_{t=1}^T \partial^2 \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) / \partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}'\right]$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) = E\left[\sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})\right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})\right)'\right]$$

ja  $\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})$  on havainnon  $y_t$  log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{1}{2} \log h_t(\boldsymbol{\vartheta}) - \frac{u_t(\boldsymbol{\vartheta})^2}{2h_t(\boldsymbol{\vartheta})}.$$

- Jos  $\tilde{l}(\boldsymbol{\phi}, \delta)$  maksimoituu pisteessä  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\delta})$ , pätee ilman normaalisuusoletustakin

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} N\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\right)$$

- Tunnetut todistukset vaativat kuitenkin, että  $E(y_t^4) < \infty$ , mikä ei välttämättä päde, vaikka normaalisuusoletus olisikin voimassa.
- Normaalisuusoletuksen voimassa ollessa pätee  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$ , joten keskivirheiden ja Waldin testien lausekkeet yksinkertaistuvat.
- Kuten GARCH-malleilla, voidaan uskottavuusfunktio ja yo tulos johtaa korvaamalla normaalijakauma esimerkiksi t-jakaumalla.

Käyttäen tulosta

$$\hat{\vartheta} \underset{as}{\sim} N \left( \vartheta, \mathbf{V}(\vartheta)^{-1} \mathbf{B}(\vartheta) \mathbf{V}(\vartheta)^{-1} \right)$$

ja matriisien  $\mathbf{V}(\vartheta)$  ja  $\mathbf{B}(\vartheta)$  empiirisiä vastineita

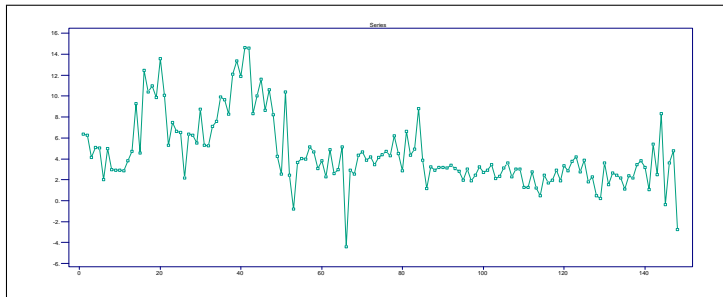
$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\vartheta}) = \left[ -\partial^2 \tilde{\gamma}(\hat{\vartheta}) / \partial \vartheta \partial \vartheta' \right]^{-1} \quad \text{ja}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\vartheta}) = \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \tilde{l}_t(\hat{\vartheta}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \tilde{l}_t(\hat{\vartheta}) \right)'$$

voidaan estimaattorin  $\hat{\vartheta}$  asymptoottista jakaumaa käyttää likimääräisten keskivirheiden ja parametria  $\vartheta$  koskevien Waldin testien konstruoimiseen.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki



**Kuvio 4.1.** USAn neljännesvuosittainen inflaatioasarja ajanjaksolta 1970I - 2006IV ( $T = 148$ ). Alkuperäisen kausipuhdistetun kuluttajien hintaindeksin logaritmiset differenssit kerrottuna neljälläsadalla.

- USAn neljännesvuosittainen inflaationsarja, jolle estimoitiin jaksossa 4.4 normaalijakaumaan perustuva AR(3)-malli, jonka residuaalien neliöissä havaittiin viitteitä autokorrelaatiosta.
- Normaalijakaumaan perustuva AR(3)-GARCH(1,1)-malli ( $\bar{y}_t = y_t - 4.56$ ):

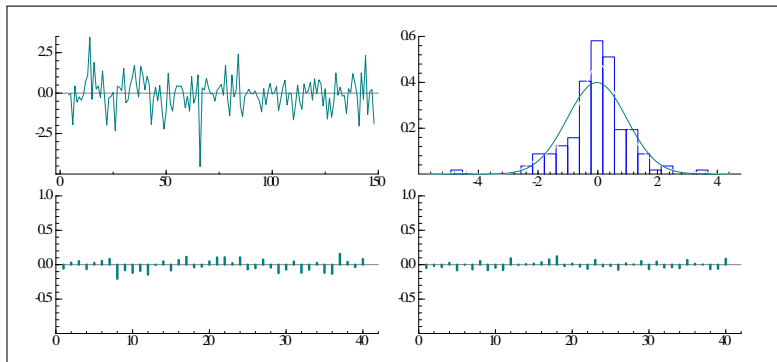
$$\bar{y}_t = \underset{\substack{(0.088) \\ [0.077]}}{0.396} \bar{y}_{t-1} + \underset{\substack{(0.102) \\ [0.158]}}{0.278} \bar{y}_{t-2} + \underset{\substack{(0.092) \\ [0.128]}}{0.265} \bar{y}_{t-1} + u_t$$

$$h_t = \underset{\substack{(0.240) \\ [0.254]}}{0.419} + \underset{\substack{(0.094) \\ [0.135]}}{0.489} h_{t-1} + \underset{\substack{(0.232) \\ [0.418]}}{0.654} u_{t-1}^2$$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1.14 \Rightarrow$  heikon stationaarisuuden ehto ei voimassa.
- $E[\log(\beta + \alpha \varepsilon_t^2)] < 0 \Rightarrow$  vahvan stationaarisuuden ehto toteutuu.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki: Normaalinen innovaatio



- Inflaationsarjaan sovitetusta AR(1)-GARCH(1,1)-mallista laskettu residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja  $N(0, 1)$ -jakauman tiheysfunktio (ylh. oik.) sekä residuaalien ja neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktiot viipymillä  $h = 1, \dots, 40$  (alh. vas. ja oik.).

- t-jakaumaan perustuva AR(3)-GARCH(1,1)-malli ( $\eta$  vapausaste parametri):

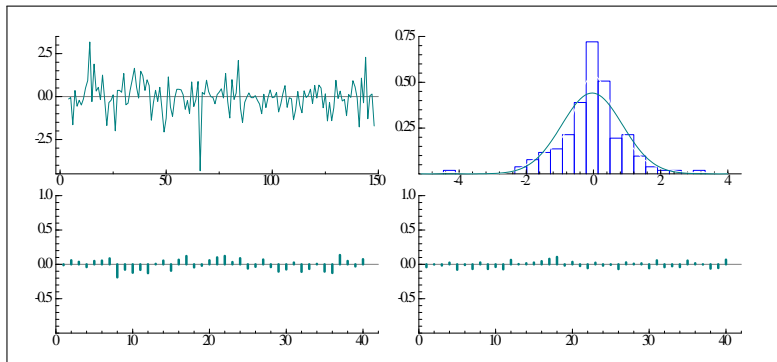
$$\bar{y}_t = \underset{\substack{(0.089) \\ [0.099]}}{0.316} \bar{y}_{t-1} + \underset{\substack{(0.085) \\ [0.091]}}{0.262} \bar{y}_{t-2} + \underset{\substack{(0.080) \\ [0.087]}}{0.311} \bar{y}_{t-1} + u_t$$

$$h_t = \underset{\substack{(0.524) \\ [0.589]}}{0.635} + \underset{\substack{(0.137) \\ [0.142]}}{0.537} h_{t-1} + \underset{\substack{(0.378) \\ [0.388]}}{0.610} u_{t-1}^2, \quad \hat{\eta} = 3.140,$$

- Estimaateissa ei ole kovin suurta eroa verrattuna normaalisen mallin estimaatteihin.
- GARCH-parametrien estimaatit toteuttavat vahvan stationaarisuuden ehdon, mutta eivät heikoin stationaarisuuden ehtoa.
- Residuaalikuvat silmämääräisesti hyvin samanlaisia kuin normaalissa mallissa.

# Ehdollisen varianssin mallintaminen

## Empiirinen esimerkki: t-jakautunut innovaatio



- Inflaationsarjaan sovitetusta AR(1)-GARCH(1,1)-mallista laskettu residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja  $N(0, 1)$ -jakauman tiheysfunktio (ylh. oik.) sekä residuaalien ja neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktiot viipymillä  $h = 1, \dots, 40$  (alh. vas. ja oik.).