- GARCH(1,1)-mallin ilmeinen yleistys on GARCH(r,s)-malli,

  $$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)$$

  $$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2$$

- Ehdon $h_t > 0$ takaamiseksi oletetaan usein ehdot

  $$\omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \; i = 1, .., s, \quad \beta_i \geq 0, \; i = 1, .., r,$$

  jotka eivät kuitenkaan ole välttämättömiä, ellei $r = s = 1$.

- Lisäksi, ainakin yksi parametreista $\alpha_1, ..., \alpha_s$ nollasta poikkeava, jottei differenssiyhtälöstä tulisi ei-satunnainen.

Ehdollisen varianssin mallintaminen
GARCH(r,s)-malli

$$
\begin{aligned}
h_t &= \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 \\
&= \omega + \beta(B)\, h_t + \alpha(B)\, y_{t-1}^2,
\end{aligned}
$$

jossa $\beta(B) = \beta_1 B + \cdots + \beta_r B^r$ ja $\alpha(B) = \alpha_1 B + \cdots + \alpha_s B^s$.

- Siis,
$$(1 - \beta(B))\, h_t = \omega + \alpha(B)\, y_{t-1}^2.$$
- Parametrien estimointi vaatii identifioituv. ehdon (vrt. ARMA-malli): Polynomeilla $\alpha(z)$ ja $1 - \beta(z)$ ei ole yhteisiä juuria ja joko α_s tai β_r on nollasta poikkeava.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

GARCH(r,s)-malli

- Yhtälö $h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 \Rightarrow$

$$y_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \beta_j) y_{t-j}^2 + \xi_t - \sum_{j=1}^{r} \beta_j \xi_{t-j}, \qquad (*)$$

  jossa $m = \max\{r, s\}$, $\alpha_j = 0$, jos $j > s$, ja $\beta_j = 0$, jos $j > r$.

  Lisäksi, $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t\left(\varepsilon_t^2 - 1\right)$.

- $(*)$ voidaan esittää vaihtoehtoisesti

$$\left(1 - \beta(B) - \alpha(B)\right) y_t^2 = \omega + \left(1 - \beta(B)\right) \xi_t.$$

  Stationaarisuus ja $\mathrm{E}\left(y_t^2\right) < \infty$, jos $1 - \beta(z) - \alpha(z) \neq 0$, $|z| \leq 1$

  eli kuten *ARMA(p,q)-mallin vastaava tulos, josta tätä ei kuitenkaan voida päätellä.*

Ehdollisen varianssin mallintaminen

GARCH(r,s)-malli

- GARCH(1,1)-mallin vahvan stationaarisuuden välttämätön ja riittävä ehto $\mathrm{E}\left[\log\left(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_t^2\right)\right] < 0$ voidaan yleistää (monimutkaisesti) myös GARCH(r,s)-mallille.

- Kun polynomin $1 - \beta(z)$ juuret sijaitsevat yksikköympyrän kehän ulkopuolella voidaan GARCH(r,s)-mallille johtaa ARCH(∞)-esitys:

$$(1 - \beta(B))\, h_t = \omega + \alpha(B)\, y_{t-1}^2 \Rightarrow h_t = \frac{\omega}{1 - \beta(B)} + \frac{\alpha(B)}{1 - \beta(B)} y_t^2$$

- Kun $\mathrm{E}\left(y_t^4\right) < \infty$, voidaan johtaa y_t^2:n autokorrelaatiofunktio ARMA(m,r)-esityksestä

$$y_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \beta_j) y_{t-j}^2 + \xi_t - \sum_{j=1}^{r} \beta_j \xi_{t-j}, \quad \xi_t \sim \mathrm{wn}(0, \cdot).$$

Ehdollisen varianssin mallintaminen
Muita malleja

- Ns. kynnysmallissa muuttujan y_{t-1} etumerkin vaikuttavan ehdolliseen varianssiin:

$$h_t \quad = \quad \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2 + \pi \mathbf{1}\left(y_{t-1} > 0\right) y_{t-1}^2,$$

  jossa $\mathbf{1}\left(y_{t-1} > 0\right)$ saa arvon 1, kun $y_{t-1} > 0$, ja 0, kun $y_{t-1} \leq 0$.
- Lisäksi, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ ja $\alpha + \pi \geq 0$, jotta $h_t > 0$.
- Stationaarisuus ja $\mathrm{E}\left(y_t^2\right) < \infty$ riippuvat virhetermin ε_t jakaumasta.
  - Symmetrisen jakauman tapauksessa vaaditaan $\alpha + \beta + \pi/2 < 1$.
- Osaketuottosarjoissa tyypillisesti $\pi \leq 0$, koska negatiivisten "uutisten" vaikutus on suurempi kuin positiivisten.

- Ns. EGARCH-mallissa (E $\leftrightarrow$ 'exponent') mallinnetaan $\log h_t$:tä:

$$\log h_t = \omega + \beta \log h_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-1} + \pi\left(|\varepsilon_{t-1}| - \mathsf{E}\left(|\varepsilon_{t-1}|\right)\right).$$

  Parametreille ei tarvitse asettaa ehtoja, jotta $h_t > 0$ toteutuisi.

- Tässä mallissa voidaan prosessin $\log h_{t-1}$ ja siten h_t:n ja y_t:n stationaarisuus päätellä kuten AR(1)-prosessin tapauksessa.
- Ehto $|\beta| < 1$ takaa stationaarisuuden, koska

$$g\left(\varepsilon_{t-1}\right) = \alpha\varepsilon_{t-1} + \pi\left(|\varepsilon_{t-1}| - \mathsf{E}\left(|\varepsilon_{t-1}|\right)\right) \sim \text{iid}\left(0, \cdot\right).$$

- Koska $g\left(\varepsilon_{t-1}\right)$ voidaan kirjoittaa

$$(\alpha + \pi)\varepsilon_{t-1}\mathbf{1}\left(\varepsilon_{t-1} > 0\right) + (\alpha - \pi)\varepsilon_{t-1}\mathbf{1}\left(\varepsilon_{t-1} \leq 0\right) - \pi\mathsf{E}\left(|\varepsilon_{t-1}|\right)$$

  on negatiivisten uutisten vaikutus $\alpha - \pi$ ja positiivisten $\alpha + \pi$.

- Oletuksesta

$$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)$$

seuraa

$$\mathrm{E}_{t-1}\,(y_t) = 0,$$

joten prosessin y_t ennustaminen ei ole kiinnostava kysymys.

- Tarkastellaan sen sijaan ehdollisen varianssin h_t ennustamista GARCH(1,1)-tapauksessa olettaen vahva stationaarisuus.
- Ehdollisen varianssin määritelmä vaatii lisäksi ehdon $\mathrm{E}(y_{t+1}^2) < \infty$ ja ennusteen keskineliövirheen äärellisyys ehdon $\mathrm{E}(h_{t+1}^2) < \infty$ ja siten ehdon $\mathrm{E}(y_{t+1}^4) < \infty$.

- Kun $k \geq 2$, niin h_{t+k}:n keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennuste on
$$\mathrm{E}_t\left(h_{t+k}\right) = \omega \sum_{j=0}^{k-2} (\alpha+\beta)^j + (\alpha+\beta)^{k-1} h_{t+1}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$
jossa h_{t+1} on funktio ennusteajankohtana tunnetuista muuttujista $\{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$.
- Käytännössä ω, α ja β täytyy korvata estimaateilla.
- Nyt ennustettava suurekin ei-havaittava, mutta voidaan laskea yhtälön $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2$ avulla kaikilla $t \geq 1$, kunhan alkuarvot h_0 ja y_0 tunnetaan.
- y_0 voidaan olettaa tunnetuksi, mutta h_0:aa ei. h_0 korvataan usein havaitusta aikasarjasta lasketulla otosvarianssilla.
- Stationaarisessa tapauksessa alkuarvojen vaikutus häviää t:n kasvaessa.

- Yleisen GARCH(r,s)-mallin ennustaminen sujuu periaatteessa samalla tavalla kuin GARCH(1,1)-mallin, joskin kaavoista tulee monimutkaisempia.
- Ennusteiden luottamusvälien muodostaminen on myös monimutkaista mm. siksi, että ehdollisen varianssin jakauma on vahvasti normaalista poikkeava.

Ehdollisen varianssin mallintaminen
GARCH-mallien parametrien estimointi

- Oletetaan, että

$$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0,1)\,,$$

jossa $h_t = h(y_{t-1}, y_{t-2}, ...)$ ja $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp (y_{t-1}, y_{t-2}, ...)$.

Oletetaan lisäksi, että y_t on stationaarinen.

- Oletuksista seuraa

$$y_t \,|\{y_{t-j}, j \geq 1\} \sim y_t \mid h_t \sim \text{N}\,(0, h_t)\,.$$

- Havaittu aikasarja $y_{-l}, ..., y_0, y_1, ..., y_T$, jossa ensimmäiset l havaintoa käytetään ehdollisten varianssien $h_1, ..., h_T$ arvojen laskemiseen.
  - Esim. GARCH(1,1)-mallissa $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2 \Rightarrow l = 0$.

- Merkitään

$$\mathbf{Y}_t = (\mathbf{Y}_0, y_1, ..., y_t)\,, \quad t = 1, .., T,$$

jossa $\mathbf{Y}_0 = (y_{-l}, ..., y_0, h_{-k}, ..., h_0)$ sisältää myös ehdollisten varianssien $h_1, ..., h_T$ arvojen laskemisessa tarvittavat aikaisemmat ehdollisen varianssin arvot.

  - Esim. GARCH(1,1)-mallissa

  $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2 \Rightarrow \mathbf{Y}_0 = (h_0, y_0)$.

- Käyttäen ehdollisen tiheysfunktion kaavaa saadaan

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}_T} &= f_{y_T|\mathbf{Y}_{T-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_{T-1}} = f_{y_T|\mathbf{Y}_{T-1}} \cdot f_{y_{T-1}|\mathbf{Y}_{T-2}} \cdot f_{\mathbf{Y}_{T-2}} = \cdots \\ &= \prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_0}. \end{aligned}$$

Ehdollisen varianssin mallintaminen

GARCH-mallien parametrien estimointi

- Havaintojen yhteistiheysfunktio on siis

$$f_{\mathbf{Y}_T} = \prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_0}.$$

- Alkuarvossa $\mathbf{Y}_0 = (y_{-l}, ..., y_0, h_{-k}, ..., h_0)$ olevia ehdollisia variansseja ei käytännössä havaita eikä alkuarvon jakaumaakaan tunneta.
- Näin ollen, $f_{\mathbf{Y}_0}$ jätetään pois uskottavuusfunktiosta, joka perustetaan ehdolliseen tiheysfunktioon

$$\prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = f_{\mathbf{Y}_T} / f_{\mathbf{Y}_0}$$

  eli $\mathbf{Y}_0$ tulkitaan ei-satunnaiseksi.
- Stationaarisuuden voimassa ollessa alkuarvo-oletuksen vaikutus on suurissa otoksissa mitätön.

- Koska $y_t \,|\{y_{t-j}, j \geq 1\} \sim \mathrm{N}(0, h_t)$ ja $\mathbf{Y}_{t-1} = (\mathbf{Y}_0, y_1, ..., y_{t-1})$, saadaan (ehd. jakauma riippuu $\{y_{t-j}, j \geq 1\}$:sta vain h_t:n kautta)

$$f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = (2\pi)^{-1/2} h_t^{-1/2} \exp\left\{-\frac{y_t^2}{2h_t}\right\}.$$

- Havaintojen ehdolliseksi yhteistiheysfunktioksi saadaan siten

$$\prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = (2\pi)^{-T/2} \cdot \prod_{t=1}^{T} h_t^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{y_t^2}{h_t}\right\}$$

ja ehdolliseksi (tai approksimatiiviseksi) log-uskottavuusfunktioksi

$$\tilde{l}(\delta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log h_t(\delta) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{y_t^2}{h_t(\delta)},$$

jossa esim. GARCH(1,1)-mallin tapauksessa $\delta = (\omega, \alpha, \beta)$.

- Log-uskottavuusfunktio

$$\tilde{l}(\delta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log h_t(\delta) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{y_t^2}{h_t(\delta)},$$

- Uskottavuusfunktion maksimointi vaatii samanlaisia numeerisia menetelmiä kuin ARMA(p,q)-mallissa.
- Ehdollisen varianssin arvojen $h_1(\delta), \ldots, h_T(\delta)$ laskeminen annetulla δ:n arvolla vaatii alkuarvojen $h_{-k}(\delta), \ldots, h_0(\delta)$ valinnan (esim. aineistosta laskettu otosvarianssi).
- Jotkut algoritmit vaativat $\tilde{l}(\delta)$:n tai yhtäpitävästi $h_t(\delta)$:n ensimmäiset ja toiset derivaatat, jotka voidaan laskea aina numeerisesti. Monien mallien (esim. GARCH(r,s)) tapauksessa myös analyyttiset derivaatat voidaan laskea.

- Jos normaalisuusoletus eli

$$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0,1)\,,$$

pätee, pätevät SU-estimaattorin $\hat{\delta}$ tavanomaiset asymptoottiset tulokset eli

$$\hat{\delta} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta, \mathbf{V}\left(\delta\right)^{-1}\right), \qquad (*)$$

jossa $\mathbf{V}\left(\delta\right) = \mathrm{E}\left[-\partial^2\tilde{l}(\delta)/\partial\delta\partial\delta'\right]$.

- $\mathbf{V}\left(\delta\right)$ on on (approksimatiivisesta) log-uskottavuusfunktiosta muodostettu δ:n Fisherin informaatiomatriisi ja $-\ \partial^2\tilde{l}(\delta)/\partial\delta\partial\delta'$ on vastaavasti havaittu informaatiomatriisi.
- $(*)$ pätee myös, kun havainnoista vähennetään otoskeskiarvo.

- Käytännössä erityisesti osake- ja valuuttakurssituotoilla residuaalien $\hat{\varepsilon}_t = y_t / \hat{h}_t^{1/2}$ $(\hat{h}_t^{1/2} = h_t^{1/2}(\hat{\delta}))$ jakauman on usein havaittu olevan normaalijakaumaa huipukkaampi ja paksuhäntäisempi.

- Toisin kuin ARMA(p,q)-mallin tapauksessa normaalijakaumaan perustuva tulos

$$\hat{\delta} \underset{as}{\sim} \mathsf{N}\left(\delta, \mathbf{V}\left(\delta\right)^{-1}\right), \quad \mathbf{V}\left(\delta\right) = \mathsf{E}\left[-\partial^2 \tilde{l}(\delta) / \partial\delta\partial\delta'\right],$$

  ei päde, jos virhetermi ε_t on ei-normaalinen.

- Tavanomaiseen uskottavuusteoriaan perustuvat keskivirheet, testit ja luottamusvälit ovat siten asymptoottisestikin pätemättömiä.

- Jos normaalisuusoletus $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}\left(0, 1\right)$ havaitaan virheelliseksi, voidaan ongelma yrittää ratkaista kahdella tavalla:
    - (i) Pitäytymällä (virheellisessä) normaalijakaumassa ja johtamalla estimaattorille $\hat{\delta}$ oikea asymptoottinen jakauma
    - (ii) Käyttämällä (oikeaa) ei-normaalista jakaumaa.
- Vaikka edellisen tapauksen mukainen ratkaisu onkin mahdollinen, on syytä huomata, että ei-normaalisessa tapauksessa estimaattori $\hat{\delta}$ ei ole tehokas, vaikka se voidaankin todeta tarkentuvaksi ja asymptoottisesti normaaliseksi.