

# Stationaariset aikasarjat

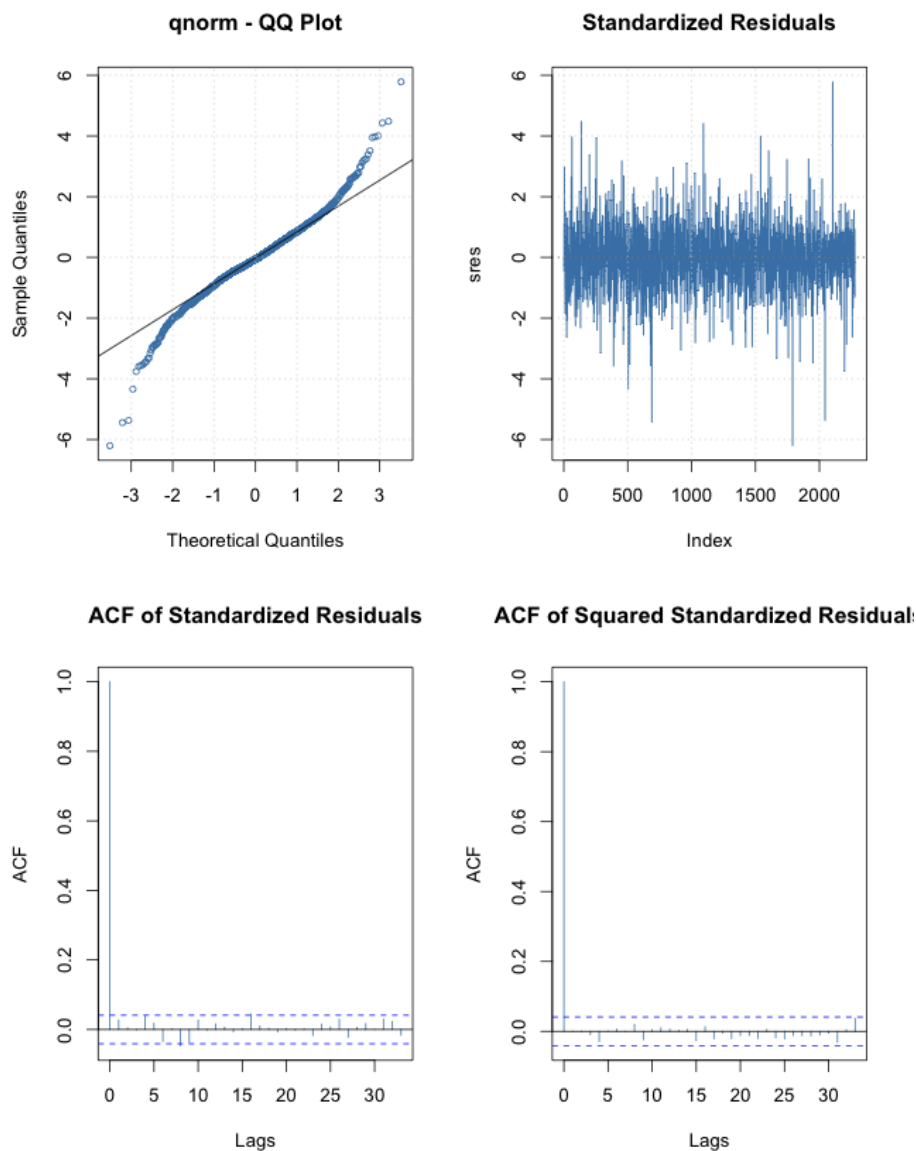
Viikko 9, 8.12.2016

Ratkaisuehdotukset

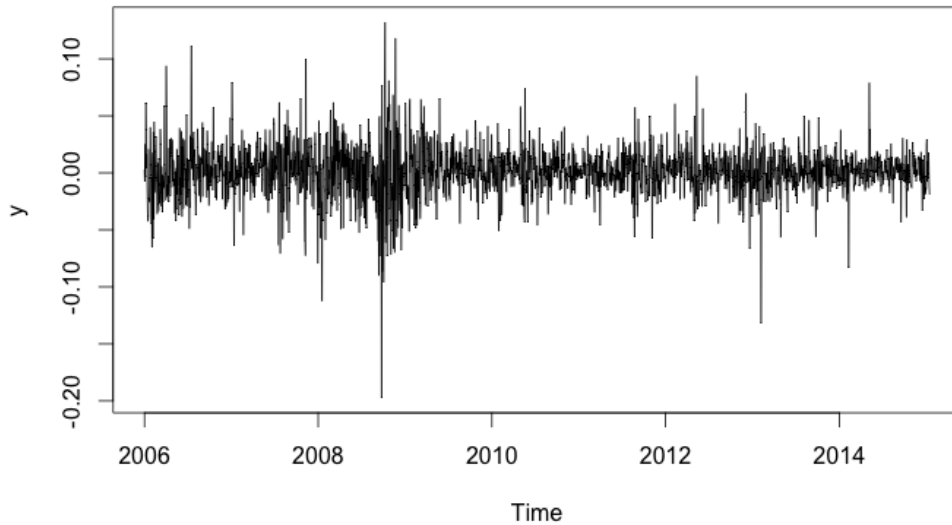
- (i) Logaritmoitu ja differenssoitu sarja on esitetty kuvassa 2. Estimoimalla saadaan GARCH(1,1)-malliksi

$$\hat{h}_t = \underset{(0.000005)}{0.00001} + \underset{(0.03)}{0.90} h_{t-1} + \underset{(0.02)}{0.08} y_{t-1}^2$$

ja vakiotermin 0.002 (keskivirhe 0.0004), jossa jakaumaksi oletetaan normaalijakauma robusteilla keskivirheillä. Estimoidun mallin standardoidut residuaalit ja QQ-kuvaaja on esitetty kuvassa 1. Residuaalien QQ-kuvaajan perusteella residuaalien jakaumalla on huomattavasti normaalijakaumaa paksummat hännät. Joidenkin estimaattien arvot ovat todella pieniä, mutta testien perusteella kuitenkin merkitseviä.



Kuva 1: Apple-aineiston standardoidut GARCH(1,1)-residuaalit ja residuaalien QQ-plot, jakaumana normaalijakauma



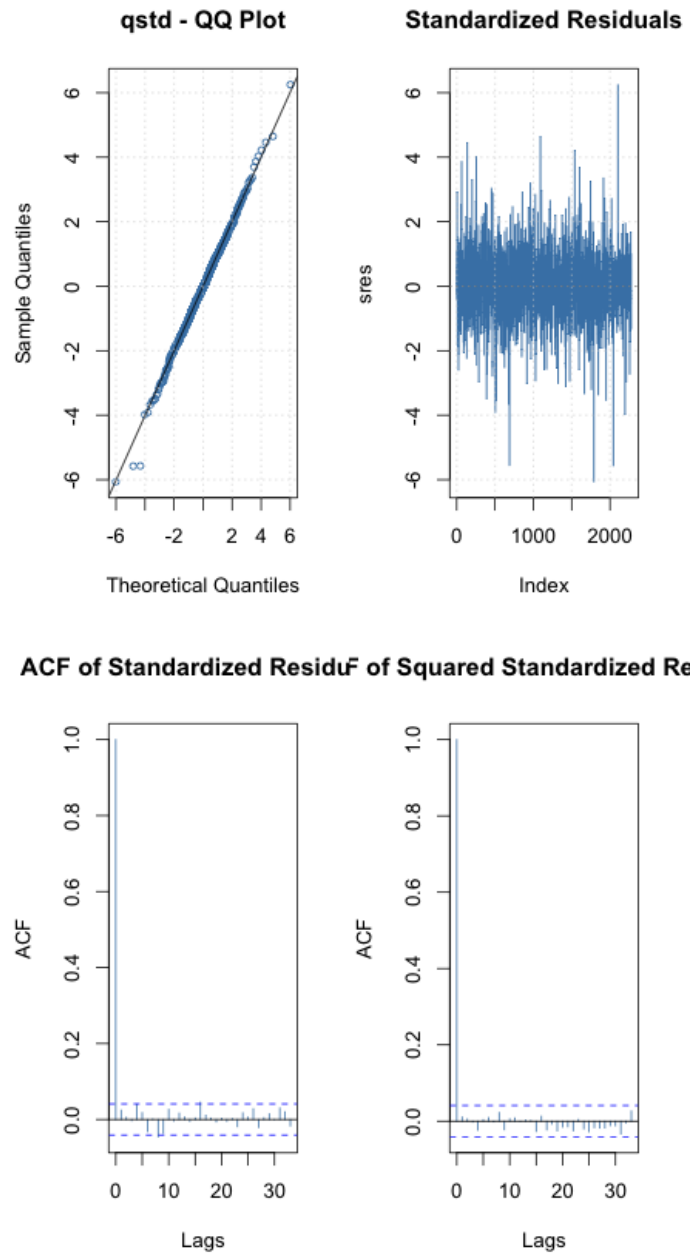
Kuva 2: Apple-aineiston logaritmoitu ja differenssoitu sarja

- (ii) Edellisessä kohdassa esitettyjen tulosten ja kuvan 1 perusteella GARCH(1,1) sopii aineistoon kohtuullisesti, mutta standardoitujen residuaalien otosjakauman hännät vaikuttavat normaalijakaumaa paksummalta. Estimointi käyttäen t-jakaumaa tuottaa GARCH-komponenttiin estimaatit

$$\hat{h}_t = \underset{(0.000002)}{0.000005} + \underset{(0.02)}{0.93} h_{t-1} + \underset{(0.01)}{0.06} y_{t-1}^2,$$

jossa vakiotermissä estimointiin 0.002 (keskivirhe 0.0003) ja t-jakauman vapausasteiksi 5.44. Virhetermin parametrit  $\alpha$  ja  $\beta$  toteuttavat heikon stationaarisuuden ehdon. Kuvassa 3 on esitetty sovitettujen mallien QQ-kuvaaja, standardoidut residuaalit sekä niiden autokorrelaatiofunktiot. Kuvien perusteella malli sopii aineistoon hyvin.

Mallin sopivuutta voidaan tarkastella myös informaatiokriteerien avulla vertailemalla korkea-asteisempiin malleihin. Informaatiokriteerien perusteella suurempiasteiset GARCH-mallit kuitenkin sopivat aineistoon heikommin, joskin ero on erittäin pieniä. Residuaaleihin ei jää autokorrelaatioita, joita olisi tarpeen selittää, joten ARMA-GARCH-mallin sovittaminen aineistoon ei ole tarpeen.



Kuva 3: Apple-aineiston logaritmoitu ja differenssoitu sarja, standardoidut GARCH(1,1)-residuaalit ja residuaalien QQ-plot, jakaumana t-jakauma

2. (i) Tarkastellaan Treasury-aineistoa ja estimoidaan siihen harjoituksissa 8 sovitettu ARMA(1,1)-malli, johon valitaan alustavasti GARCH(1,1)-virhekomponentti normaalijakaumalla. Tulokseksi saadaan malli, jolle pätee

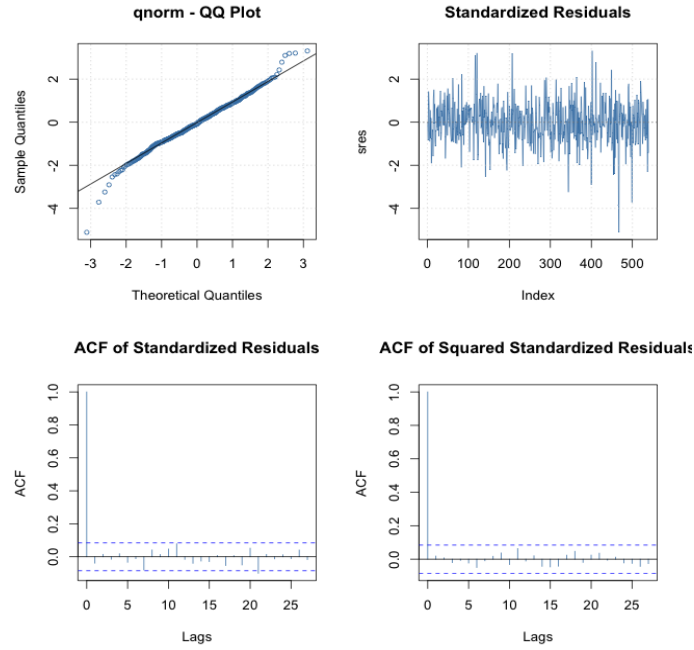
$$\hat{y}_t = -0.0004 - 0.19y_{t-1} + 0.61\hat{u}_{t-1} + \hat{u}_t,$$

(0.002)      (0.09)      (0.10)

$$\hat{h}_t = 0.00004 + 0.88h_{t-1} + 0.12\hat{u}_{t-1}^2.$$

(0.00002)      (0.04)      (0.04)

Estimaatit toteuttavat niukasti heikon stationaarisuuden ehdon (kun valitaan riittävästi desimaaleja). Mallin standardoidut residuaalit, QQ-kuvaaja ja autokorrelaatiokuvat on esitetty kuvassa 5



Kuva 4: Logaritmoidun ja differenssoidun Treasury-aineistoon sovitetun GARCH(1,1)-virhetermillä varustetun ARMA(1,1)-mallin diagnostiikkakuvia, jakaumana normaalijakauma

- (ii) Tarkastellaan edellisessä kohdassa estimoidun ARMA-GARCH-mallin sopivuutta aineistoon residuaalien avulla.

Kuvassa 4 oikealla ylhäällä on standardoitu residuaalisarja ja vieressä sen QQ-kuvaaja, jonka perusteella residuaaleilla on jälleen hieman normaalijakaumaa paksummat häntät. Alarivillä esitettyjen autokorrelaatiokuvien perusteella malli onnistuu suodattamaan autokorrelaation ja ehdollisen heteroskedastisuuden pois aineistosta. GARCH-komponentin asteiden kasvattaminenkaan ei informaatiokriteerien perusteella vaikuta tarpeelliselta.

Residuaalien paksujen häntien perusteella voidaan yrittää sovittaa malliin myös t-jakauma. Mallin estimointi t-jakaumalla (vapausaste-estimaatti 7.42 keskivirheellä 2.0) tuottaa tulokseksi

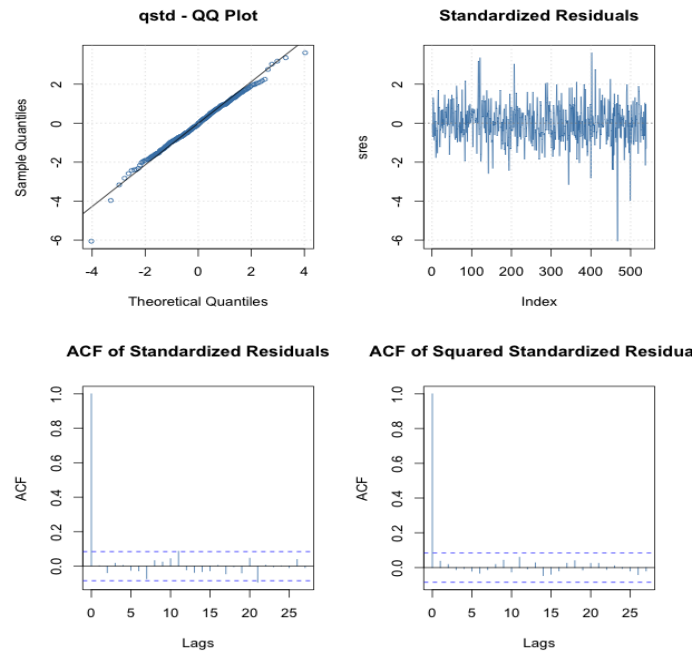
$$\hat{y}_t = -0.002 - 0.12 y_{t-1} + 0.49 \hat{u}_{t-1} + \hat{u}_t,$$

(0.001)
(0.10)
(0.09)

$$\hat{h}_t = 0.00004 + 0.90 h_{t-1} + 0.08 \hat{u}_{t-1}^2.$$

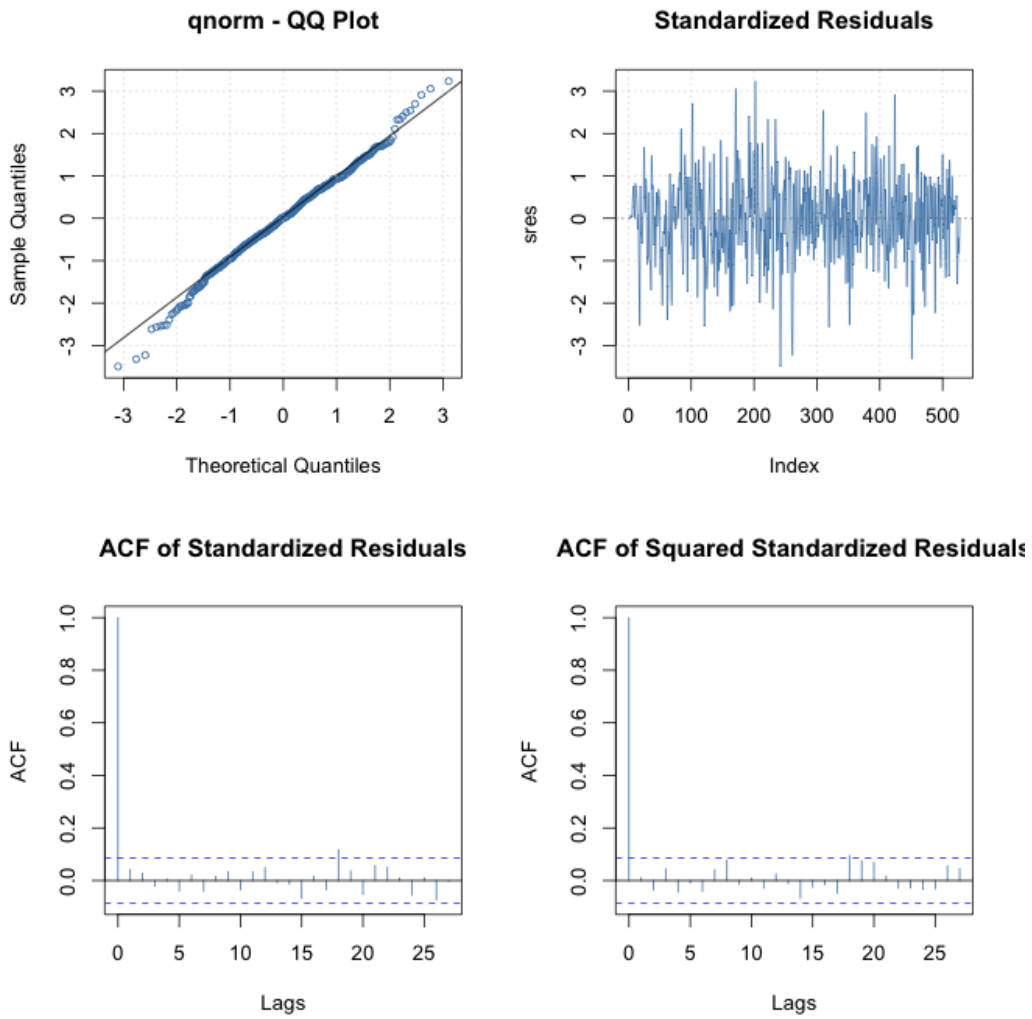
(0.00003)
(0.03)
(0.03)

Kuvan 5 perusteella myös t-jakaumaa käyttävä malli sopii hyvin.



Kuva 5: Logaritmoidun ja differenssoidun Treasury-aineistoon sovitetun GARCH(1,1)-virhetermillä varustetun ARMA(1,1)-mallin diagnostiikkakuvia, jakaumana t-jakauma

3. (i) Tarkastellaan Exchange-aineistolle harjoituksissa 8 käytettyä ARMA(2,3)-mallia, mutta käytetään nyt virhetermeille alustavasti GARCH(1,1)-mallia normaalijakautuneilla virheillä.
- (ii) Diagnostisten tarkastelujen perusteella (ks. kuva 6) malli sopii aineistoon lineaarista mallia paremmin. Harjoituksissa 8 tarkasteltiin ARMA-mallien sopivuutta informaatiokriteerin mielessä ja huomattiin, että myös MA(1)-malli vaikutti lupaavalta vaihtoehdolta. Tarkastellaan nyt näitä malleja, käyttäen virhetermeille GARCH(1,1)-mallia. Tulokset on esitetty taulukossa 1.



Kuva 6: Logaritmoidun ja differenssoidun Expect-aineistoon sovitetun GARCH(1,1)-virhetermillä varustetun ARMA(2,3)-mallin diagnostiikkakuvia.

Malli	AIC	BIC	SIC	HQC
ARMA(2,3)	-4.84	-4.77	-4.84	-4.81
ARMA(2,1)	-4.84	-4.78	-4.84	-4.82
ARMA(0,1)	-4.85	-4.81	-4.85	-4.83
ARMA(0,0)	-4.75	-4.72	-4.75	-4.74

Taulukko 1: Expect-aineiston informaatiokriteerin arvoja eri malleille, kun virheterminä GARCH(1,1).

Estimoidaan siis MA(1)-malli GARCH(1,1)-virhetermillä. Estimaateiksi saadaan

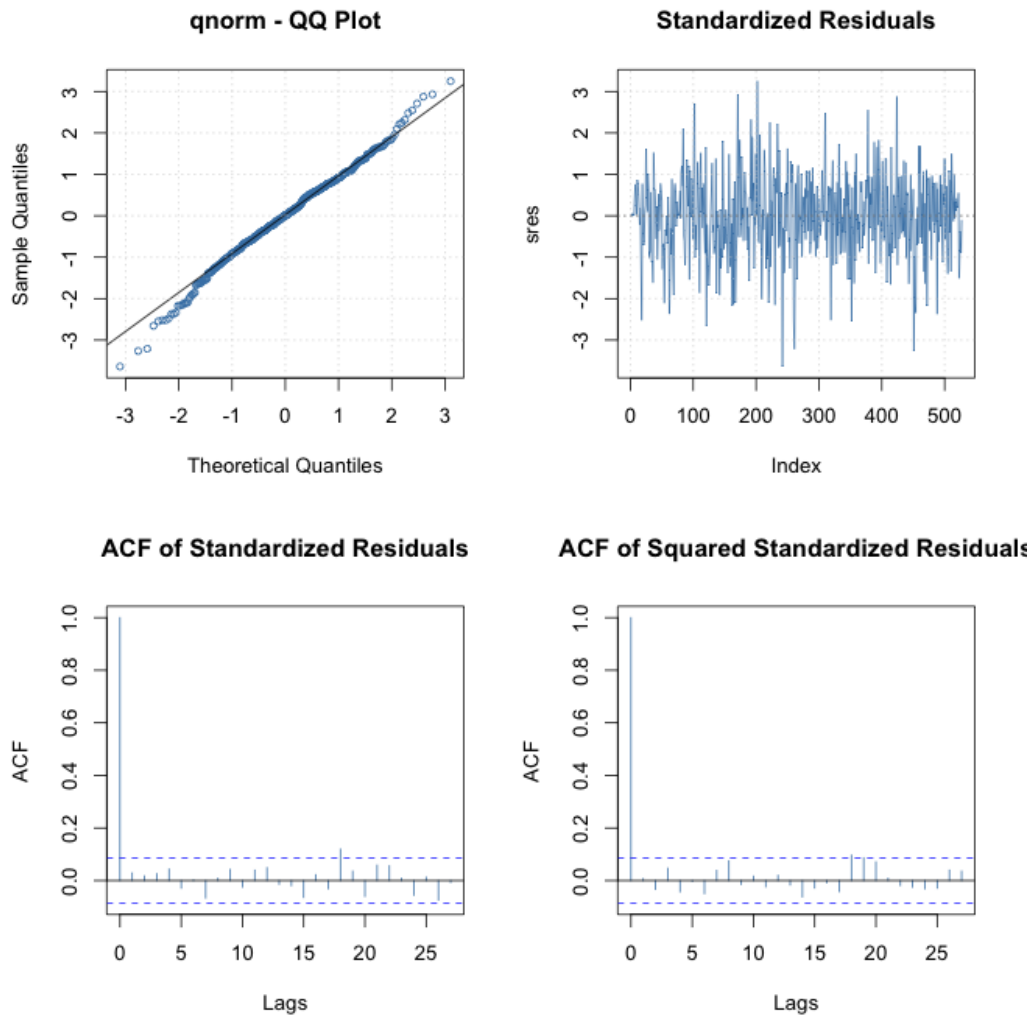
$$\hat{y}_t = -0.0006 + 0.36 \hat{u}_{t-1} + \hat{u}_t,$$

(0.001)                      (0.04)

$$\hat{h}_t = 0.00007 + 0.71 h_{t-1} + 0.16 \hat{u}_{t-1}^2.$$

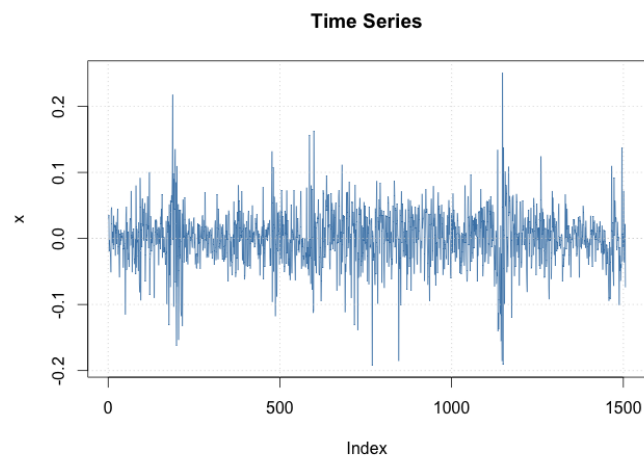
(0.00003)                      (0.11)                      (0.06)

Diagnostiikkatarkastelut on esitetty kuvassa 8. Kuvien perusteella eroa ei juurikaan ole ja malli sopii aineistoon (lähes) yhtä hyvin kuin edellä sovitettu ARMA(2,3)-malli. Molemmassa on käytetty normaali jakaumaa virheille.



Kuva 7: Logaritmoidun ja differenssoidun Expect-aineistoon sovitetun GARCH(1,1)-virhetermillä varustetun MA(1)-mallin diagnostiikkakuvia.

4. (i) Tehtävän logaritmoitu ja differenssoitu aikasarja on esitetty kuvassa 8



Kuva 8: Logaritmoitu ja differenssoitu Oil-aineisto.

AIC informaatiokriteerin perusteella aineistoon sopisi ARMA(7,6)-malli, joka ei kuitenkaan pysty huomioimaan aineistossa ilmenevää ehdollista heteroskedastisuutta, vaan residuaalien neliöihin jää autokorrelaatioita. Sama tapahtuu myös pienempiasteisilla lineaarisilla ARMA-malleilla, joten tarkastellaan eri vaihtoehtoja GARCH-komponentin kanssa.

Lähdetään taas liikkeelle mallista, jossa virhetermi on GARCH(1,1) normaalijakautuneilla virheillä ja etsitään ARMA-mallin asteet informaatiokriteerin avulla. Parhaiten pärjänneiden mallien ARMA-osat on esitetty taulukossa 2. Erot eivät ole suuria, mutta valitaan malliksi MA(2), jota suosittavat erityisesti AIC ja BIC. Näin saadaan estimoiduksi malliksi

$$\hat{y}_t = 0.0007 + 0.16 \hat{u}_{t-1} - 0.06 \hat{u}_{t-2} + \hat{u}_t,$$

(0.001)
(0.03)
(0.03)

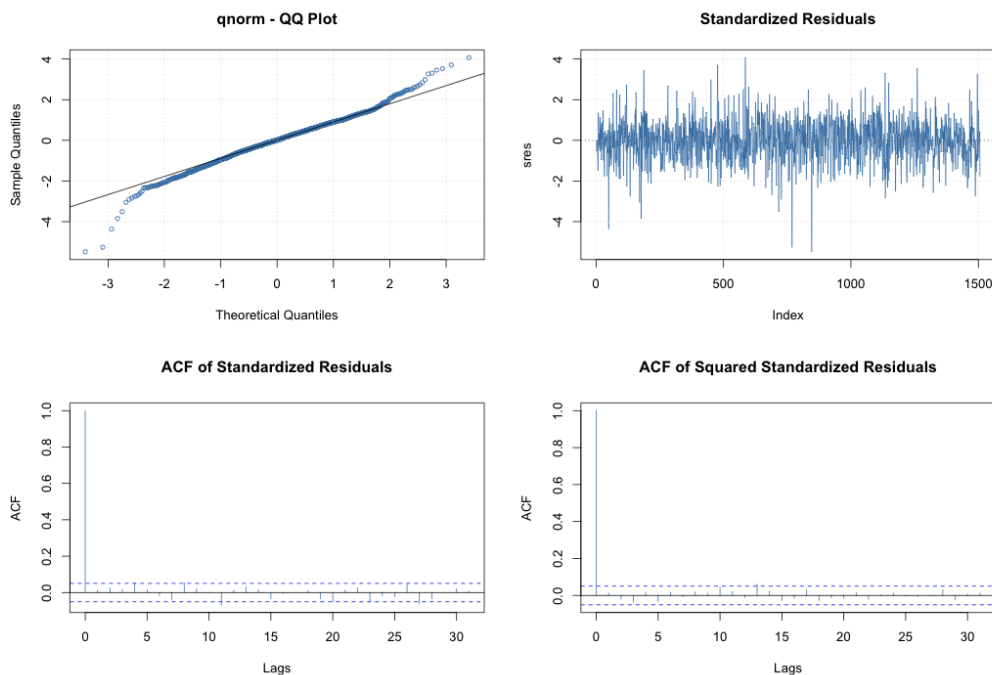
$$\hat{h}_t = 0.00005 + 0.88 h_{t-1} + 0.09 \hat{u}_{t-1}^2.$$

(0.00002)
(0.02)
(0.02)

Mallin GARCH-kertoimet toteuttavat heikon stationaarisuuden ehdon, vaikka jälleen aika niukasti.

Malli	AIC	BIC	SIC	HQC
ARMA(0,1)	-3.698	-3.680	-3.698	-3.691
ARMA(0,2)	-3.701	-3.680	-3.701	-3.693
ARMA(1,0)	-3.695	-3.677	-3.695	-3.688
ARMA(2,0)	-3.701	-3.679	-3.701	-3.693
ARMA(1,1)	-3.699	-3.678	-3.699	-3.691
ARMA(2,1)	-3.700	-3.675	-3.700	-3.691
ARMA(1,2)	-3.699	-3.675	-3.700	-3.690
ARMA(2,2)	-3.699	-3.672	-3.699	-3.689

Taulukko 2: Oil-aineiston informaatiokriteerin arvoja eri malleille, kun virheterminä GARCH(1,1).



Kuva 9: Logaritmoidun ja differenssoidun Oil-aineistoon sovitetun GARCH(1,1)-virhetermillä varustetun MA(2)-mallin diagnostiikkakuvia, jakaumana normaalijakauma.



- (ii) Kuvan 9 perusteella MA(2) GARCH(1,1)-virheillä onnistuu suodattamaan residuaaleista ehdollisen heteroskedastisuuden pois, mutta residuaalien otosjakauma näyttää selvästi normaalijakaumaa paksuhäntäisemmältä.

Estimoidaan sama malli t-jakaumaa käyttäen. Estimaateiksi saadaan

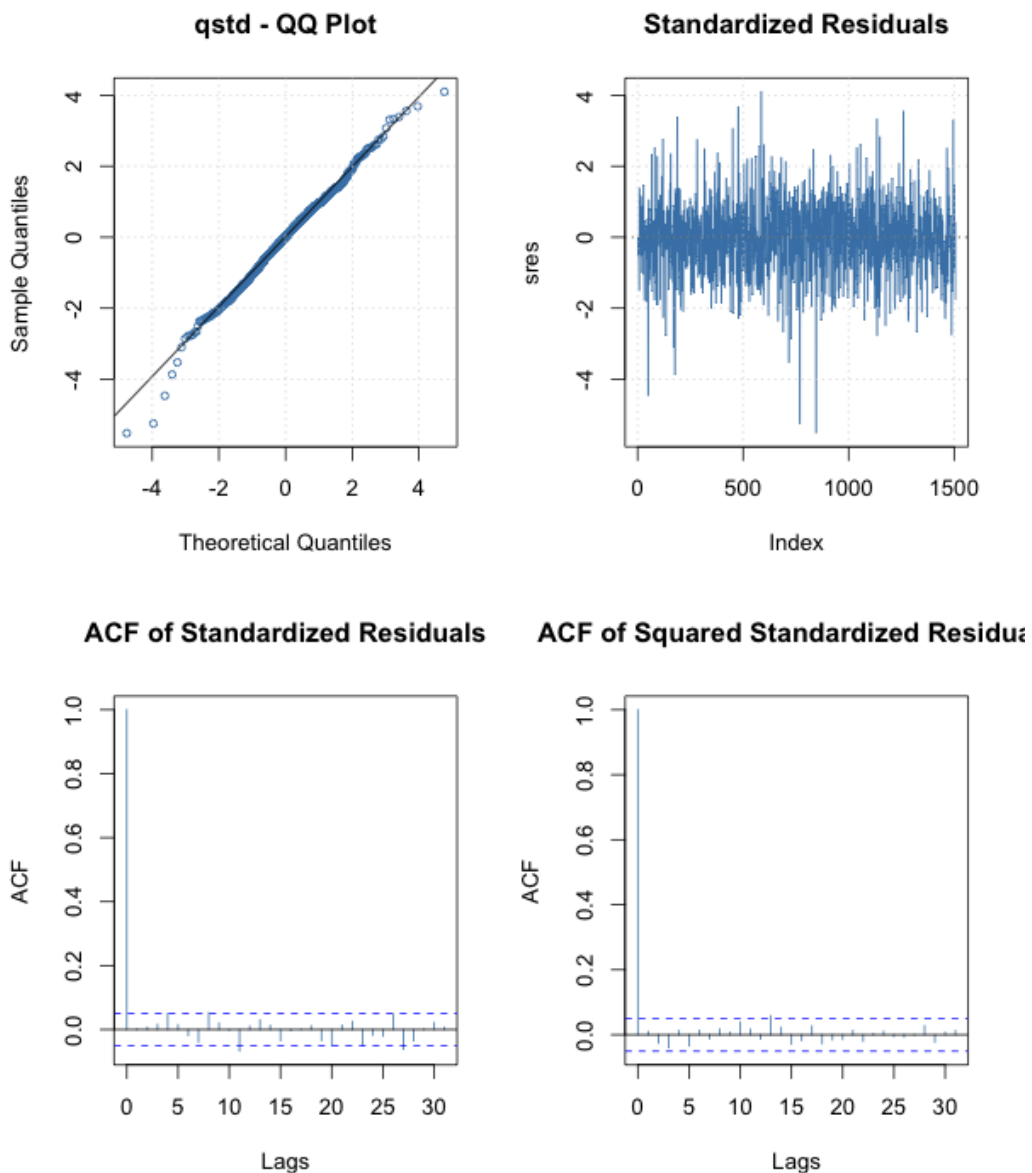
$$\hat{y}_t = 0.0009 + 0.16 \hat{u}_{t-1} - 0.04 \hat{u}_{t-2} + \hat{u}_t,$$

(0.001)
(0.03)
(0.03)

$$\hat{h}_t = 0.00005 + 0.87 h_{t-1} + 0.10 \hat{u}_{t-1}^2,$$

(0.00002)
(0.02)
(0.02)

jossa t-jakauman vapausasteiden estimaatiksi saadaan 7.52 keskivirheellä 1.33. Malli näyttäisi nyt sopivan paremmin (ks. kuva 10).



Kuva 10: Logaritmoidun ja differenssoidun Oil-aineistoon sovitetun GARCH(1,1)-virhetermillä varustetun MA(2)-mallin diagnostiikkakuvia, jakaumana t-jakauma.