

# Stationaariset aikasarjat

Viikko 8, 24.11.2016

Ratkaisuehdotukset

1. Prosessin määrittelyn nojalla  $E(y_t) = E(h_t^{1/2} \varepsilon_t) = E(h_t^{1/2})E(\varepsilon_t) = 0$ , missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa riippumattomuudesta. Tästä seuraa, että kaikilla  $j > 0$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(y_t, y_{t-j}) &= E(y_t y_{t-j}) \\ &= E(h_t^{1/2} \varepsilon_t h_{t-j}^{1/2} \varepsilon_{t-j}) \\ &= E(h_t^{1/2} h_{t-j}^{1/2} \varepsilon_{t-j}) E(\varepsilon_t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Prosessi  $y_t$  on siis autokorreloimaton.

2. (i) Tehtävänannon vihjeen ja kurssimonisteessa esitetyn tuloksen  $E_{t-1}(y_t) = 0$  perusteella saadaan väite osoitettua, sillä

$$\begin{aligned}E(y_t | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) &= E(E(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) \\ &= E(E_{t-1}(y_t) | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) \\ &= 0.\end{aligned}$$

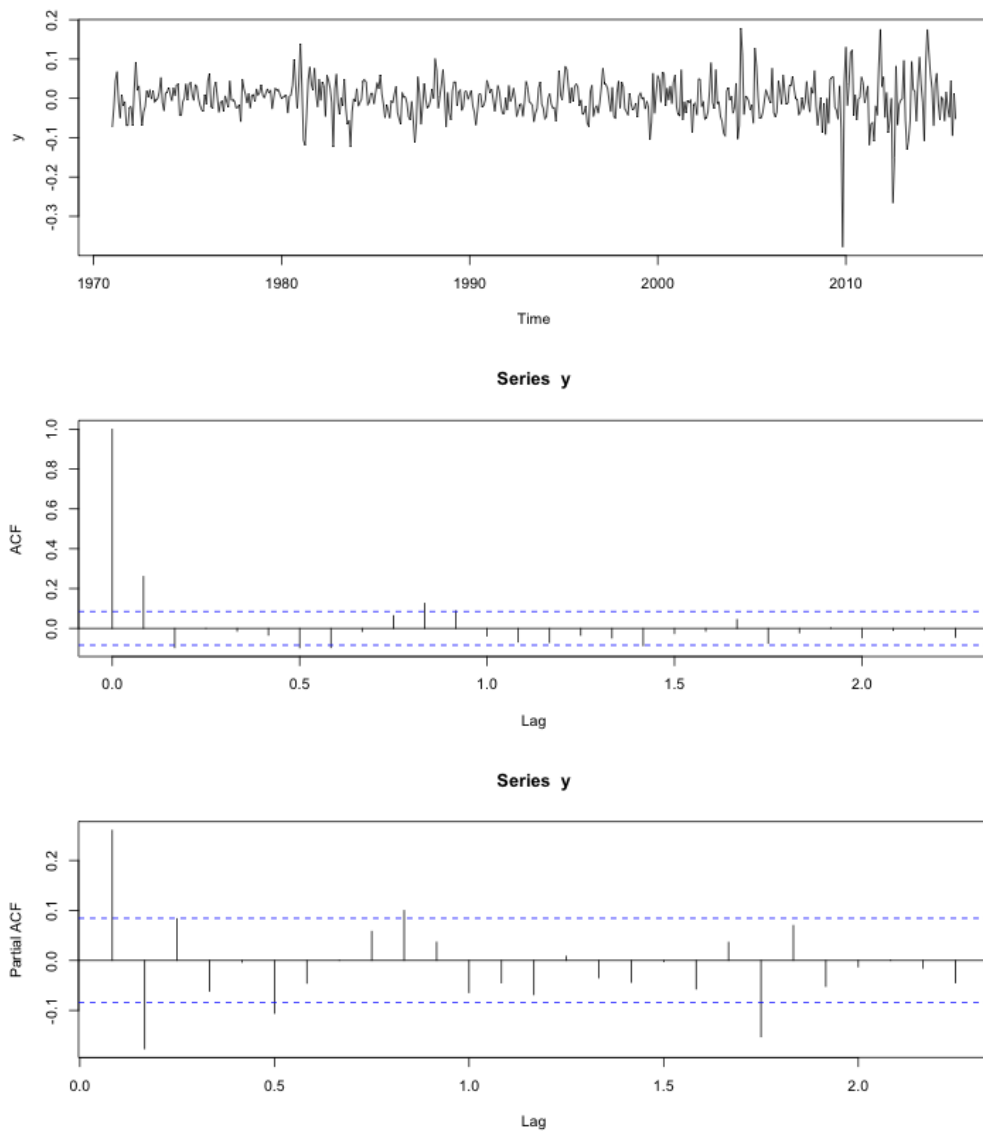
- (ii) Aloitetaan selvittämällä odotusarvo  $E(y_t)$ . Tätä varten esitetään prosessi  $y_t$  sellaisessa muodossa, että saadaan ehdollistavat satunnaismuuttujat näkyviin, eli

$$\begin{aligned}y_t &= h_t^{1/2} \varepsilon_t \\ &= (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} \varepsilon_t \\ &= (\omega + \alpha (h_{t-1}^{1/2} \varepsilon_{t-1})^2)^{1/2} \varepsilon_t \\ &= (\omega + \alpha (\omega + \alpha y_{t-2}^2) \varepsilon_{t-1}^2)^{1/2} \varepsilon_t \\ &= (\omega(1 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2) + \alpha^2 y_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2)^{1/2} \varepsilon_t.\end{aligned}$$

Tehtävän ensimmäisen osan perusteella tiedetään, että  $E(y_t | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) = 0$ , joten

$$\begin{aligned}\text{Var}(y_t | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) &= E(y_t^2 | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) \\ &= E[(\omega(1 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2) + \alpha^2 y_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2) \varepsilon_t^2 | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots] \\ &= E(\omega(1 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2) | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) E(\varepsilon_t^2) \\ &\quad + E(\alpha^2 y_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2 | y_{t-2}, y_{t-4}, \dots) E(\varepsilon_t^2) \\ &= \omega(1 + \alpha) + \alpha^2 y_{t-2}^2\end{aligned}$$

3. (i) Logaritmoitu ja differensoitu sarja on esitetty kuvassa 1. Samassa kuvassa esitettyjen autokorrelaatiokuvien perusteella ei voi sanoa sopivimman ARMA-mallin asteista mitään aivan varmaa, mutta pienten autokorrelaatioiden ja hitaasti (jos ollenkaan) vaimenevan osittaisautokorrelaatiofunktion perusteella mahdollisesti MA(1), MA(2) tai jokin pienasteinen ARMA-malli voisi olla sopiva. Taulukossa 1 esitettyjen informaatiokriteerin arvojen perusteella joko MA(2) tai ARMA(1,1) voisivat olla sopivimmat.



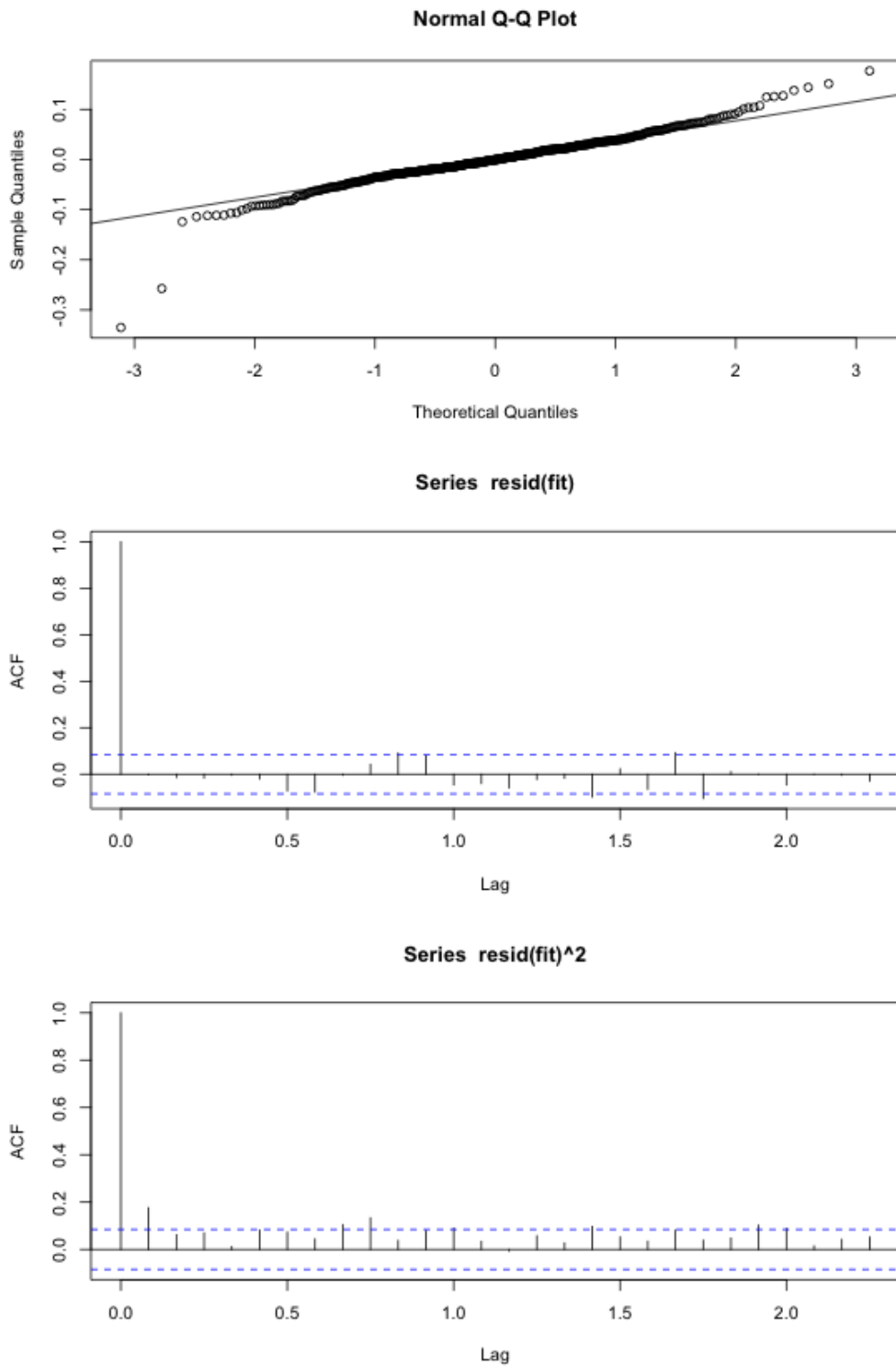
Kuva 1: Treasury-aineiston logaritmoitu ja differensoitu aikasarja sekä sen auto- ja osittaisautokorrelaatiot.

ARMA(0,0)	-1701.473
ARMA(0,1)	-1754.228
ARMA(0,2)	-1759.661
ARMA(1,0)	-1737.458
ARMA(1,1)	-1759.657
ARMA(1,2)	-1757.754
ARMA(2,0)	-1752.638
ARMA(2,1)	-1757.729
ARMA(2,2)	-1755.686

Taulukko 1: Logaritmoidulle differensoidulle Treasury-aineistolle estimoitujen ARMA-mallien AICC-arvoja.

- (ii) Estimoidaan aineistolle ARMA(1,1)-malli edellä tehtyjen tarkasteluiden perusteella. Kuvassa 2 on esitetty mallin residuaalien kvantiilikuvio sekä auto- ja osittaisautokorrelaatiokuvat. Kuvien perusteella residuaalit ovat autokorreloimattomat, mutta niiden ne-

löihin jää autokorrelaatiota pienille viiveille. Testataan tätä vielä McLeod-Li testillä, jonka tulokset on esitetty taulukossa 2. Taulukon tulosten perusteella on syytä uskoa, että residuaalien neliöt ovat autokorreloituneita. Vastaavat testitulokset mallille MA(2) on esitetty taulukossa 3, josta nähdään, ettei myöskään vaihtoehtona tarkasteltu malli MA(2) riitä ehdollisen heteroskedastisuuden huomioimiseen.



Kuva 2: Logaritmoituun ja differensoituun Treasury-aineistolle estimoidun ARMA(1,1)-mallin residuaalien diagnostiikkaa

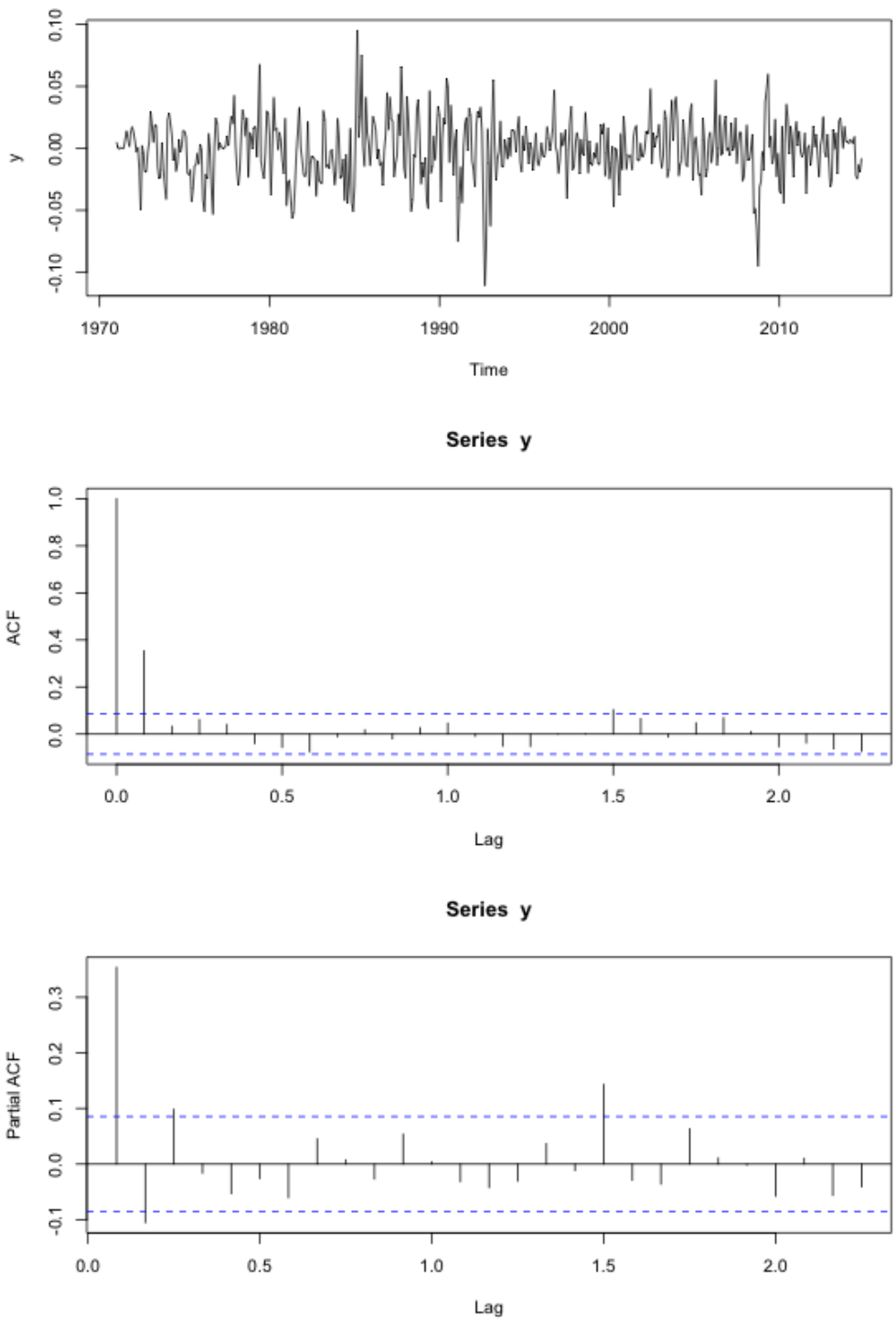
Viiveet	5	10	15	20	25
Testisuure	25.34	45.97	56.5	68.15	80.89
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0	0	0	0	0

Taulukko 2: McLeod-Li -testisuureen arvoja Treasury-aineiston logaritmien differensseille estimoidulle ARMA(1,1)-mallille.

Viiveet	5	10	15	20	25
Testisuure	23.32	43.53	53.85	65.58	78.3
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0	0	0	0	0

Taulukko 3: McLeod-Li -testisuureen arvoja Treasury-aineiston logaritmien differensseille estimoidulle ARMA(0,2)-mallille.

4. (i) Logaritmoitu ja differensoitu Exchange-sarja ja sen auto- ja osittaisautokorrelaatiokuvat on esitetty kuvassa 3. Edellisen tehtävän tapaan auto- ja osittaisautokorrelaatiokuvien perusteella ei aivan varmaksi voida sanoa mikä malli sopisi aineistoon parhaiten. Osittaisautokorrelaation voi ajatella vaimenevan jossain määrin hitaasti ja autokorrelaatiofunktio taas on selvästi nolasta poikkeava viiveellä 1 ja jotain pienempää viiveellä 2, joten MA(1) tai MA(2) voisivat olla sopivia arvauksia. Lasketaan varmuudeksi informaatiokriteerin AICC arvot kaikilla kombinaatioilla  $p = 0, \dots, 3$  ja  $q = 0, \dots, 3$ . Tulokset on esitetty taulukossa 4, josta nähdään, että MA(2) voisi tosiaankin olla varteenotettava vaihtoehto. Lisäksi (hieman yllättäen) ARMA(2,3) näyttäisi informaatiokriteerin mielessä hyvältä vaihtoehdolta.



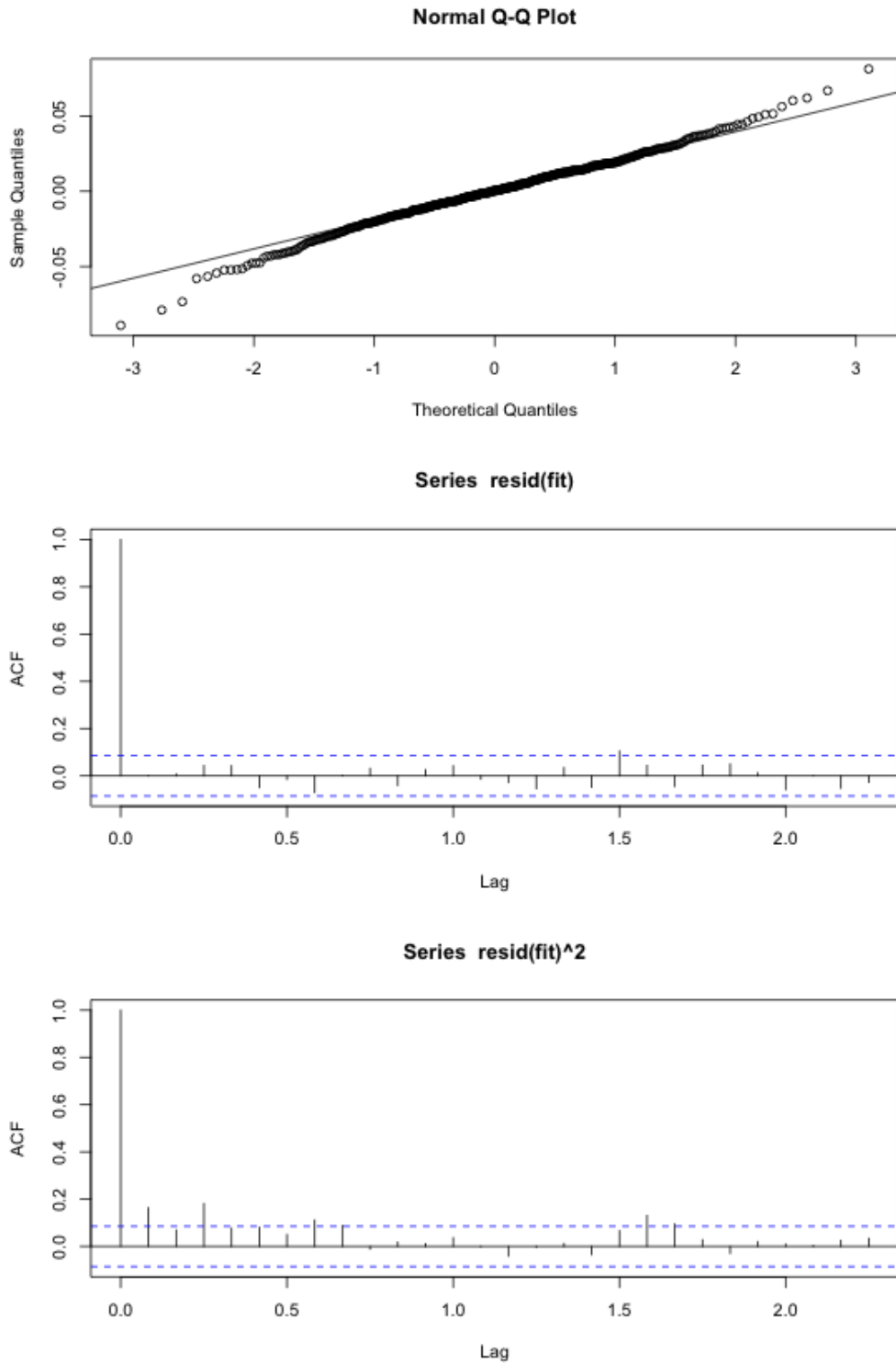
Kuva 3: Exchange-aineiston logaritmoitu ja differensoitu aikasarja sekä sen auto- ja osittaisauto-korrelaatiot.

ARMA(0,0)	-2443.031
ARMA(0,1)	-2520.349
ARMA(0,2)	-2518.39
ARMA(0,3)	-2516.533
ARMA(1,0)	-2511.384
ARMA(1,1)	-2518.396
ARMA(1,2)	-2516.714
ARMA(1,3)	-2515.124
ARMA(2,0)	-2515.2
ARMA(2,1)	-2516.497
ARMA(2,2)	-2514.947
ARMA(2,3)	-2523.816
ARMA(3,0)	-2518.285
ARMA(3,1)	-2516.304
ARMA(3,2)	-2514.706
ARMA(3,3)	-2517.247

Taulukko 4: Logaritmoidulle ja differensoidulle Exchange-aineistolle estimoitujen ARMA-mallien AICC-arvoja.

- (ii) Estimoidaan molemmat edellisessä kohdassa arvatut mallit, eli MA(2) ja ARMA(2,3). Residuaalisarjat auto- ja osittaisautokorrelaatioestimaatteineen on esitetty vastaavassa järjestyksessä kuvissa 4 ja 5.

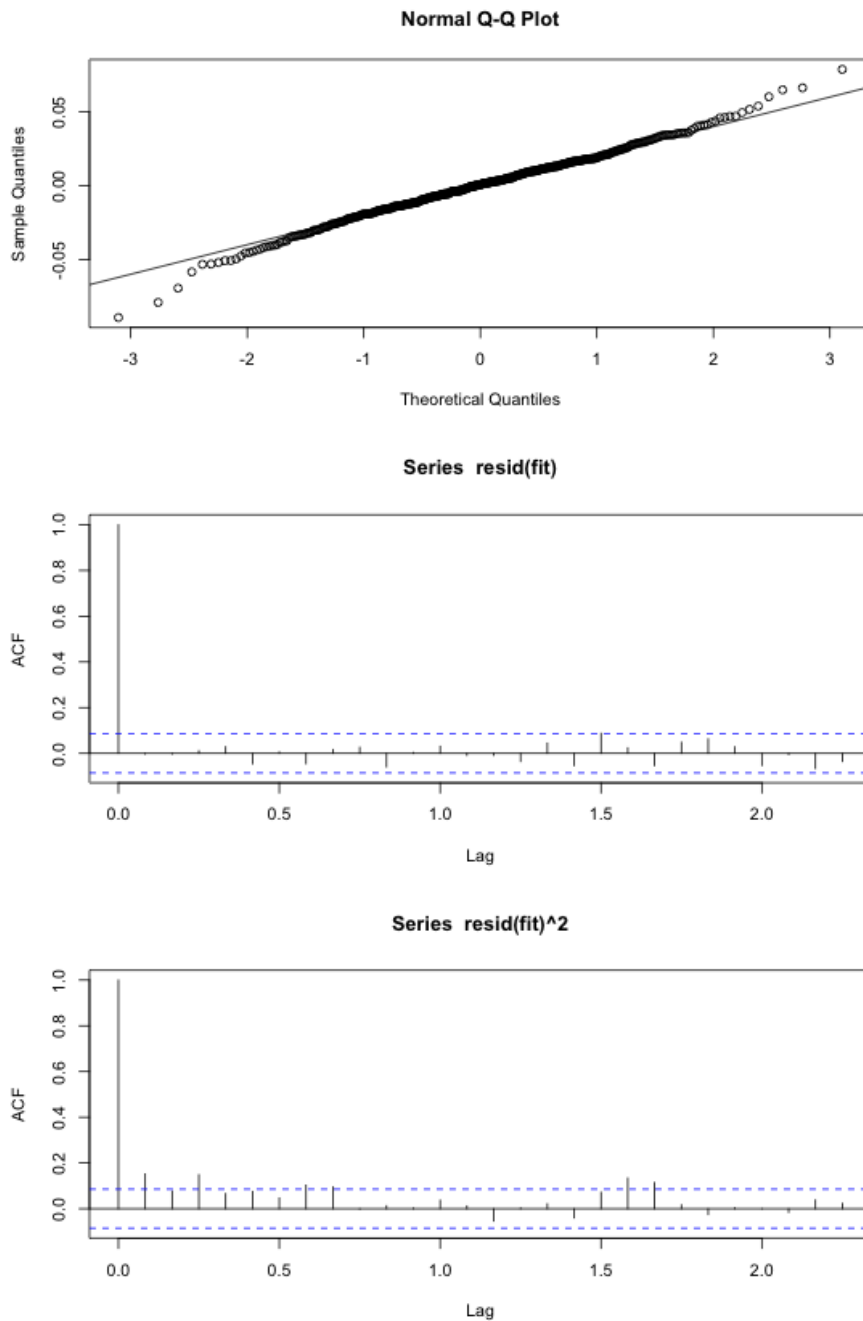
Molemmat mallit saivat autokorrelaation suodatettua aineistosta pois, mutta yhtäläillä molempien mallien residuaalien neliöissä on autokorrelaatiota havaittavissa. Taulukoissa 5 ja 6 esitetyt McLeod-Li testisuureiden arvot tukevat visuaalisen tarkastelun tuloksia. Testisuureiden perusteella ARMA(2,3) voisi olla aavistuksen sopivampi malli, mutta molemmilla residuaalien neliöt ovat vahvasti autokorreloituneita kaikilla testatuilla viiveillä.



Kuva 4: Logaritmoituun ja differensoituun Exchange-aineistolle estimoidun MA(2)-mallin residuaalien diagnostiikkaa

Viiveet	5	10	15	20	25
Testisuure	41.01	53.53	55.25	72.81	74.01
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0	0	0	0	0

Taulukko 5: McLeod-Li -testisuureen arvoja Exchange-aineiston logaritmien differensseille estimoidulle ARMA(0,2)-mallille.



Kuva 5: Logaritmoituun ja differensoituun Exchange-aineistolle estimoidun ARMA(2,3)-mallin residuaalien diagnostiikkaa



Viiveet 5	10	15	20	25
Testisuure 32.58	44.46	46.89	67.95	68.62
Vapausasteet 5	10	15	20	25
p-arvo 0	0	0	0	0

Taulukko 6: McLeod-Li -testisuureen arvoja Exchange-aineiston logaritmien differensseille estimoidulle ARMA(2,3)-mallille.