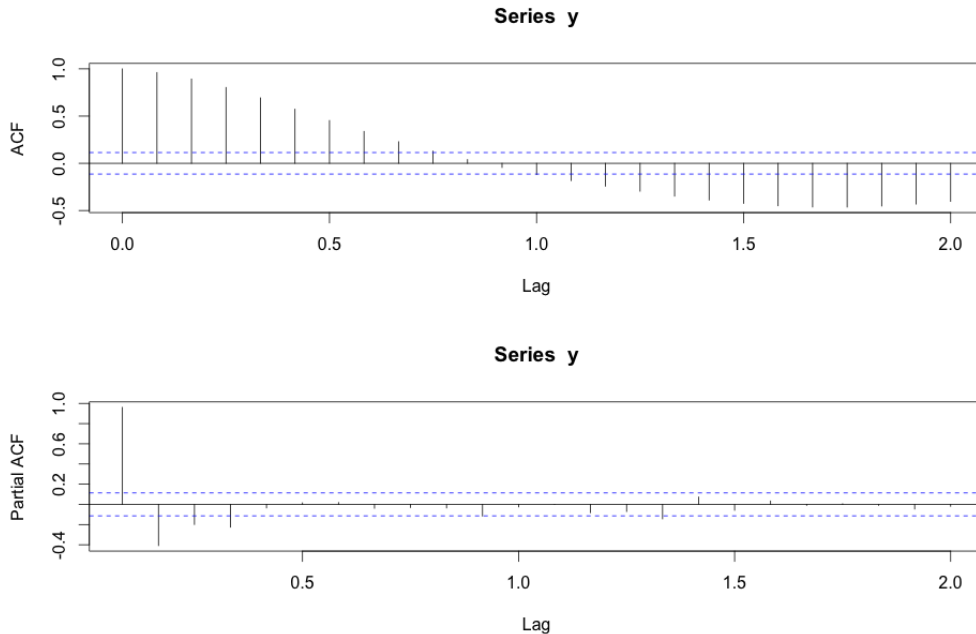


# Stationaariset aikasarjat

Viikko 7, 17.11.2016

Ratkaisuehdotukset

- (i) `auto.arima()` -funktio valitsee informaatiokriteerien perusteella mallia AR(4). Samaa valintaa tukee myös kuvassa 1 näkyvät auto- ja osittaisautokorrelaatiot. Informaatiokriteerin mielessä parhaiten menestyneet mallit on esitetty taulukossa 1.



Kuva 1: Expect-aineiston auto- ja osittaisautokorrelaatiot

- (ii) Valitulle AR(4)-mallille SU-estimointi tuottaa estimaatit  $\phi_1 = 1.23(0.06)$ ,  $\phi_2 = -0.17(0.09)$ ,  $\phi_3 = 0.08(0.09)$ ,  $\phi_4 = -0.22(0.06)$ ,  $\sigma^2 = 1.76$  ja vakio  $\nu = 100.3083(0.95)$ . Estimoidut keskivirheet on esitetty suluissa estimaatin jälkeen.

Mallin residuaalien neliöissä on havaittavissa autokorreloituneisuutta, jota ei näytä saavan pois kokeilemalla muita taulukossa 1 esitettyjä malleja (vrt tulokset taulukoissa 3, 2 ja 4). Niinpä tyydytään informaatiokriteerin mielessä sopivimpaan malliin AR(4). Mallin residuaalien autokorrelaatiot on esitetty kuvassa 5.

ARMA(2,0)	1044.574
ARMA(2,1)	1023.262
ARMA(2,2)	1025.336
ARMA(2,3)	1024.228
ARMA(3,0)	1034.385
ARMA(3,1)	1025.339
ARMA(3,2)	1024.873
ARMA(4,0)	1021.995
ARMA(4,1)	1023.761
ARMA(5,0)	1023.705

Taulukko 1: Funktion `auto.arima` tuottamia informaatiokriteerin (AICC) arvoja Expect-aineistolle. Malliin on estimoitu kaikissa vaihtoehdoissa mukaan vakio.

Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	24.76	27.92	32.21	33.56	39.54
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p.value	0.00	0.00	0.01	0.03	0.03

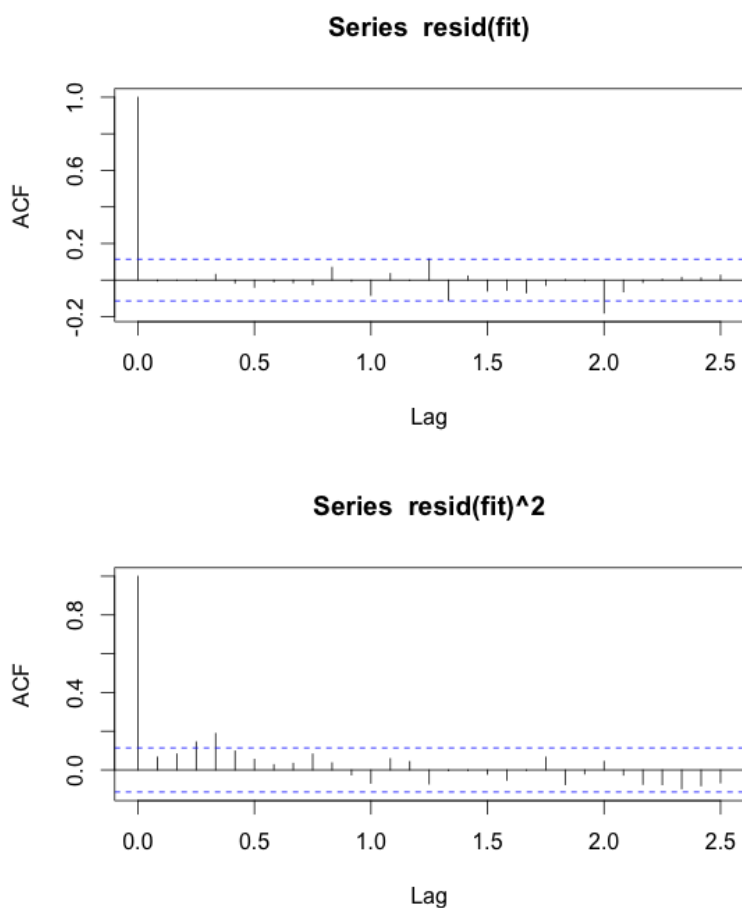
Taulukko 2: McLeod-Li -testisuuren arvoja Expect-aineistolle estimoidulle ARMA(2,1)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	24.76	27.92	32.21	33.56	39.54
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p.value	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05

Taulukko 3: McLeod-Li -testisuuren arvoja Expect-aineistolle estimoidulle AR(4)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	24.76	27.92	32.21	33.56	39.54
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p.value	0.00	0.00	0.01	0.04	0.06

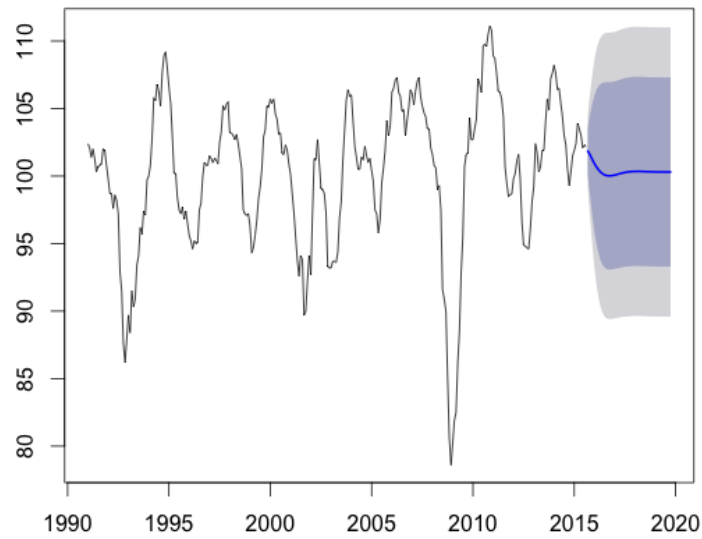
Taulukko 4: McLeod-Li -testisuuren arvoja Expect-aineistolle estimoidulle ARMA(4,1)-mallille.



Kuva 2: Expect-aineiston AR(4) -mallin residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiot

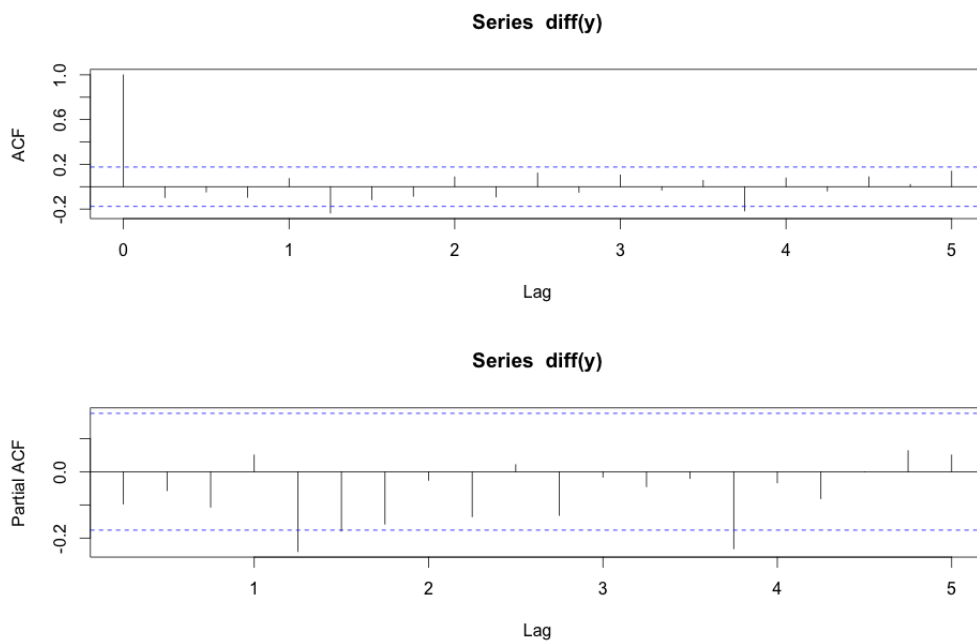
- (iii) Mallin arvojen 50 askeleen ennuste on esitetty kuvassa 3. Kuvassa nähdään, että ennuste suppenee hitaasti kohti prosessin odotusarvoa.

Forecasts from ARIMA(4,0,0) with non-zero mean



Kuva 3: Expect-aineiston AR(4)-mallin ennuste 50 askeleelle.

2. (i) Funktio `auto.arima()` tuottaa taulukon 5 mukaiset tulokset, joissa on estimoitu kaikissa mukaan vakio. Kuvassa 4 on esitetty logaritmoidun ja differenssoidun sarjan auto- ja osittaisautokorrelaatiot. Autokorrelaatiokuvan perusteella mallista ei voi paljoakaan päätellä, mutta sekä auto- että osittaisautokorrelaatioissa on selkeä piikki viidennen viiveen kohdalla. Taulukon malleista selvästi parhaan tuloksen saavat ARIMA(5,1,1) ja ARIMA(0,1,5), joten kokeillaan molempia.



Kuva 4: Import-aineiston auto- ja osittaisautokorrelaatiot

- (ii) Edellisen tehtävän tapaan residuaalien neliöihin jää autokorrelaatiota, jota ei tässä kä-

sitellyillä malleilla saada pois. Residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatioiden testit on esitetty taulukoissa 6 ja 7 (ARIMA(5,1,1)) ja 8 ja 9 (ARIMA(0,1,5)). Eroja ei juurikaan ole, molemmilla malleilla residuaalien neliöihin jää selvää autokorrelaatiota. Estimoidaan siis informaatiokriteerin mielessä paras malli ARIMA(5,1,1). Malliksi saadaan

ARIMA(0,1,5)	-299.452
ARIMA(5,1,1)	-300.495
ARIMA(5,1,2)	-298.212
ARIMA(5,1,3)	-295.913
ARIMA(6,1,0)	-294.344
ARIMA(6,1,1)	-298.221
ARIMA(7,1,0)	-295.528
ARIMA(7,1,1)	-295.946

Taulukko 5: Funktion auto.arima tuottamia informaatiokriteerin (AICC) arvoja logaritmoidulle Imports-aineistolle. Malliin on estimoitu kaikissa vaihtoehdoissa mukaan vakio.

Viipeet	10	15	20	25
Testisuure	1.52	7.47	11.25	14.99
Vapausasteet	4	9	14	19
p-arvo	0.82	0.59	0.67	0.72

Taulukko 6: Box-Ljung -testisuureen arvoja Imports-aineistolle estimoidulle ARIMA(5,1,1)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	17.56	18.81	20.31	20.96	21.75
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0	0.04	0.16	0.4	0.65

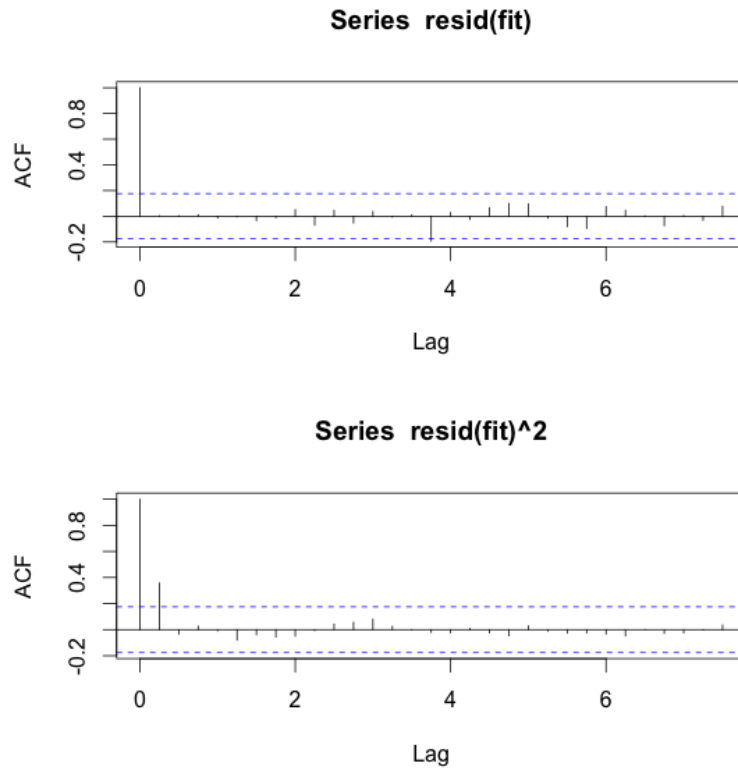
Taulukko 7: McLeod-Li -testisuureen arvoja Expect-aineistolle estimoidulle ARIMA(5,1,1)-mallille.

Viipeet	10	15	20	25
Testisuure	5.06	9.36	13.42	16.27
Vapausasteet	5	10	15	20
p-arvo	0.41	0.5	0.57	0.7

Taulukko 8: Box-Ljung -testisuureen arvoja Imports-aineistolle estimoidulle ARIMA(0,1,5)-mallille.

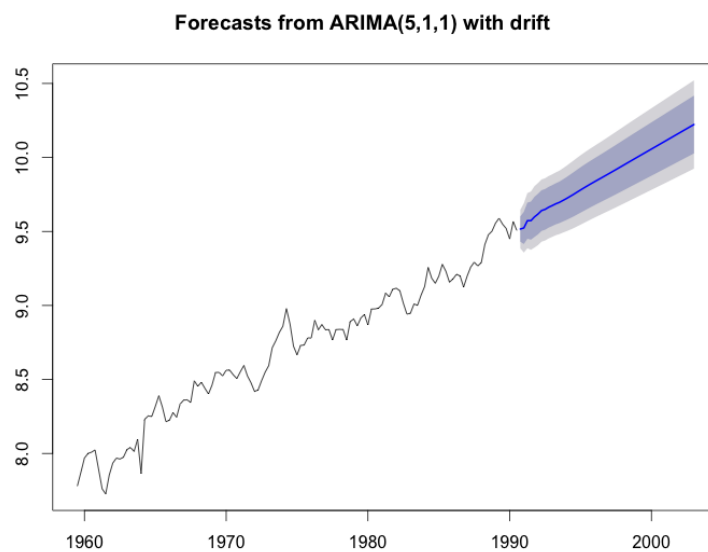
Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	17.5	18.88	20.93	21.84	22.73
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0	0.04	0.14	0.35	0.59

Taulukko 9: McLeod-Li -testisuureen arvoja Expect-aineistolle estimoidulle ARIMA(0,1,5)-mallille.



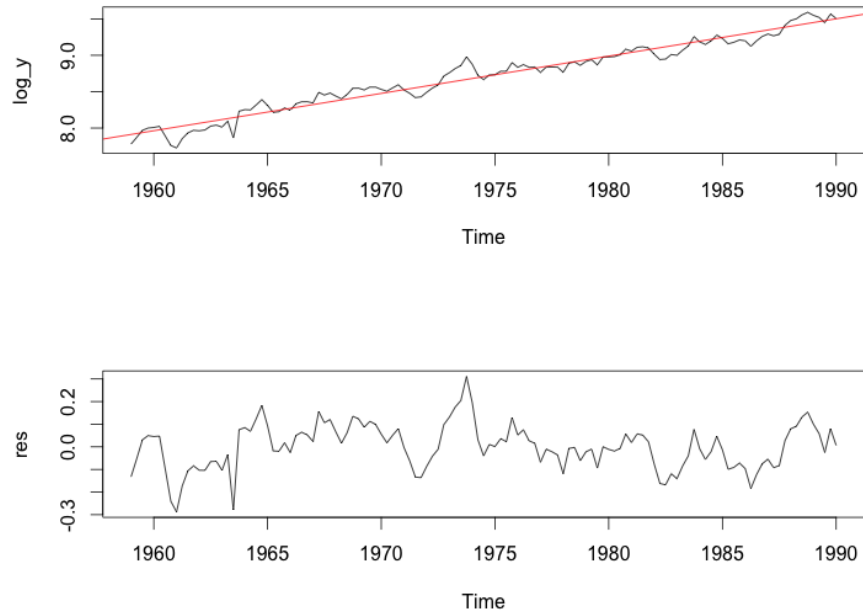
Kuva 5: Import-aineiston ARIMA(5,1,1) -mallin residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiot

- (iii) Edellisten tarkastelujen perusteella estimoidaan paras malli ARIMA(5,1,1), jossa  $\phi_1 = 0.64(0.12)$ ,  $\phi_2 = -0.01(0.10)$ ,  $\phi_3 = -0.07(0.11)$ ,  $\phi_4 = 0.10(0.11)$ ,  $\phi_5 = -0.27(0.10)$ ,  $\theta_1 = -0.84(0.10)$ ,  $\sigma^2 = 0.004$  ja vakio  $\nu = 0.01(0.002)$ . Estimoidut keskiarvot on esitetty estimaattien jälkeen suluissa.
- (iv) Mallilla ARIMA(5,1,1) lasketut ennusteet 50 askelelle on esitetty kuvassa 6. Kuvasta nähdään, että ennuste konvergoi kohti trendisuoraa ja luottamusvälit kohti vakioita.

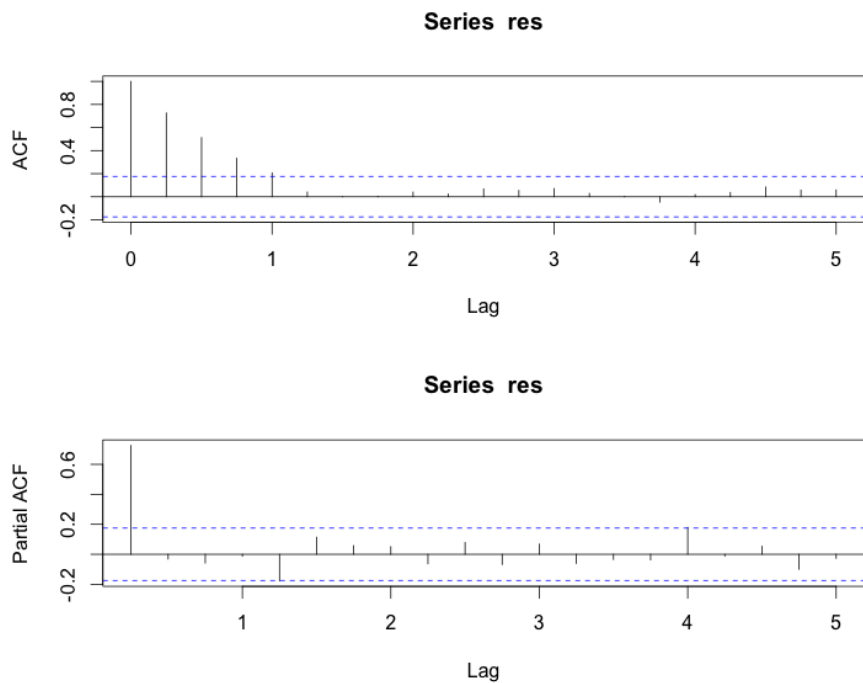


Kuva 6: Import-aineiston ARIMA(5,1,1)-mallin ennuste 50 askelelle.

3. (i) Alkuperäinen sarja ja siihen sovitettu trendisuora, sekä trendipuhdistettu residuaalisarja on esitetty kuvassa 7.



Kuva 7: Trendisuora sovitettuna Import-aineistoon ja sen residuaalisarja



Kuva 8: Auto- ja osittaisautokorrelaatiot Import-aineiston residuaalisarjalle

ARMA(0,4)	-312.39
ARMA(0,5)	-312.45
ARMA(1,0)	-314.41
ARMA(1,1)	-312.47
ARMA(1,4)	-312.07
ARMA(2,0)	-312.50
ARMA(2,1)	-311.01
ARMA(3,0)	-311.01

Taulukko 10: Funktion auto.arima tuottamia informaatiokriteerin (AICC) arvoja logaritmoidulle trendikorjatulle Import-aineistolle.

- (ii) Residuaalisarjan auto- ja osittaisautokorrelaatiot on esitetty kuvassa 8. Auto- ja osittaisautokorrelaatioiden perusteella AR(1)-malli sopisi aineistoon hyvin. Myös taulukossa 10 esitetyt auto.arima() funktion tulokset viittavat siihen, että AR(1) olisi hyvä valinta.
- (iii) Estimoidaan siis trendistationaarinen malli  $y_t = -92.45 + 0.051t + x_t$ , missä  $x_t$  on AR(1)-prosessi ilman vakiota,  $\phi_1 = 0.73(0.06)$  ja  $\sigma^2 = 0.005$ .
- (iv) AR(1)-mallin McLeod-Li ja Box-Ljung -testit residuaaleille on esitetty taulukoissa 11 ja 12. Residuaaleissa voidaan havaita ehdollista heteroskedastisuutta, mutta tämä näyttää jäävän myös muilla informaatiokriteereiden ehdottamilla malleilla, joten valitaan malliksi AR(1).

Viipeet	10	15	20	25
Testisuure	11.16	18.24	23.48	27.17
Vapausasteet	9	14	19	24
p-arvo	0.27	0.20	0.22	0.30

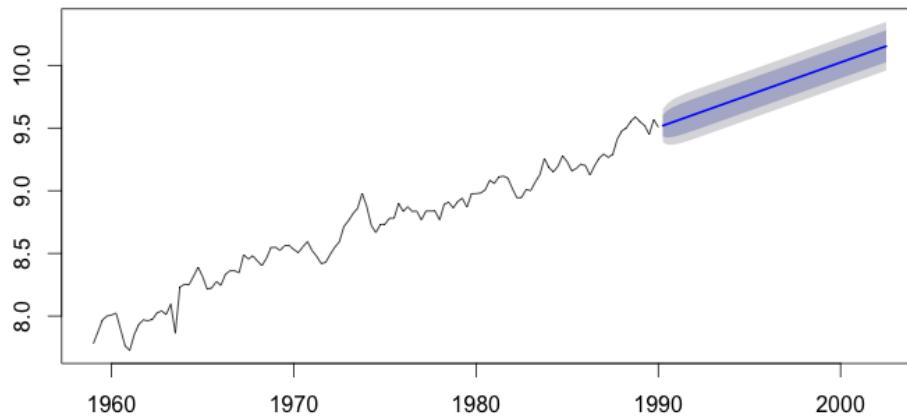
Taulukko 11: Box-Ljung -testisuureen arvoja logaritmoidulle Import-aineistolle estimoidulle trendistationaariselle AR(1)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	19.70	22.16	28.60	29.32	30.22
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0	0.01	0.01	0.08	0.22

Taulukko 12: McLeod-Li -testisuureen arvoja logaritmoidulle Import-aineistolle estimoidulle trendistationaariselle AR(1)-mallille.

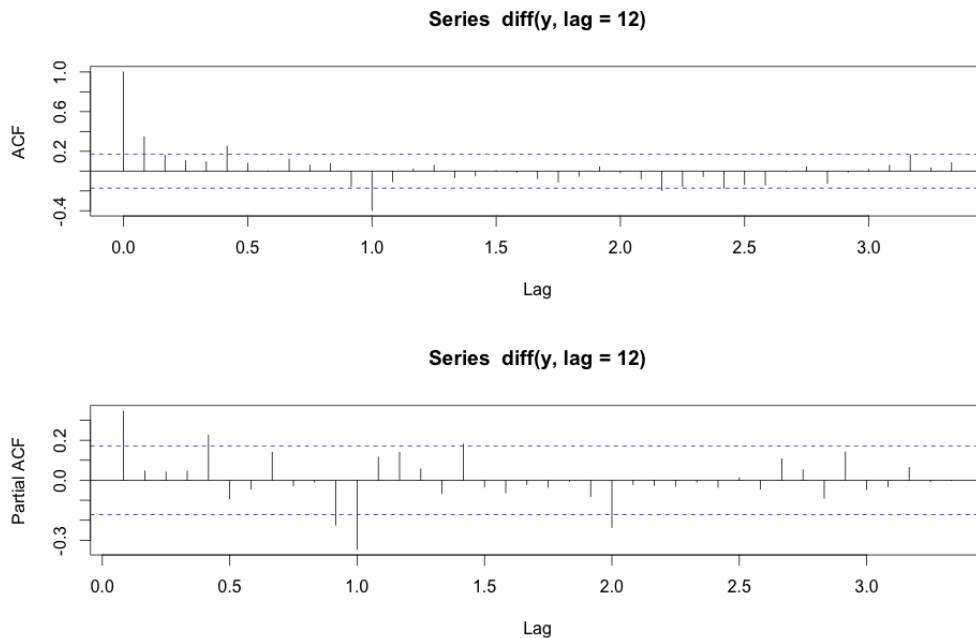
- (v) Logaritmoidun sarjan trendistationaarisen AR(1)-mallin ennusteet on esitetty kuvassa 9, josta näkyy ennusteen nopea suppeneminen trendisuoralle.

Forecasts from ARIMA(1,0,0) with non-zero mean



Kuva 9: Logaritmoidun Import-aineiston trendistationaarisen AR(1)-mallin ennuste 50 askelelle.

4. (i) Logaritmoidun ja kausidifferensoidun aineiston auto- ja osittaisautokorrelaatiokuvaajat on esitetty kuvassa 10. Kuvan perusteella valinta  $d=0$ ,  $D=1$  näyttäisi sopivalta ja mahdollisesti ehkä  $P=Q=1$  (12 viipeen monikerroilla piikkiä). Asteita  $p$  ja  $q$  on kuvan perusteella mallin astetta on kuitenkin kovin vaikea lähteä tarkasti valitsemaan, joten tutkitaan informaatiokriteereitä taulukossa 13. Taulukossa esitettyihin malleihin on kaikkiin estimoitu mukaan vakio.



Kuva 10: Auto- ja osittaisautokorrelaatiot logaritmoidulle Wine-aineistolle



SARIMA(0,0,5)(0,1,1)[12]	-137.07
SARIMA(1,0,1)(0,1,1)[12]	-140.24
SARIMA(1,0,1)(0,1,2)[12]	-138.32
SARIMA(1,0,2)(0,1,1)[12]	-138.09
SARIMA(2,0,0)(1,1,2)[12]	-138.00
SARIMA(2,0,1)(1,1,2)[12]	-137.83
SARIMA(2,0,2)(1,1,2)[12]	-138.16

Taulukko 13: Funktion auto.arima tuottamia informaatiokriteerin (AICC) arvoja logaritmoidulle Wine-aineistolle. Malliin on estimoitu kaikissa vaihtoehdoissa mukaan vakio.

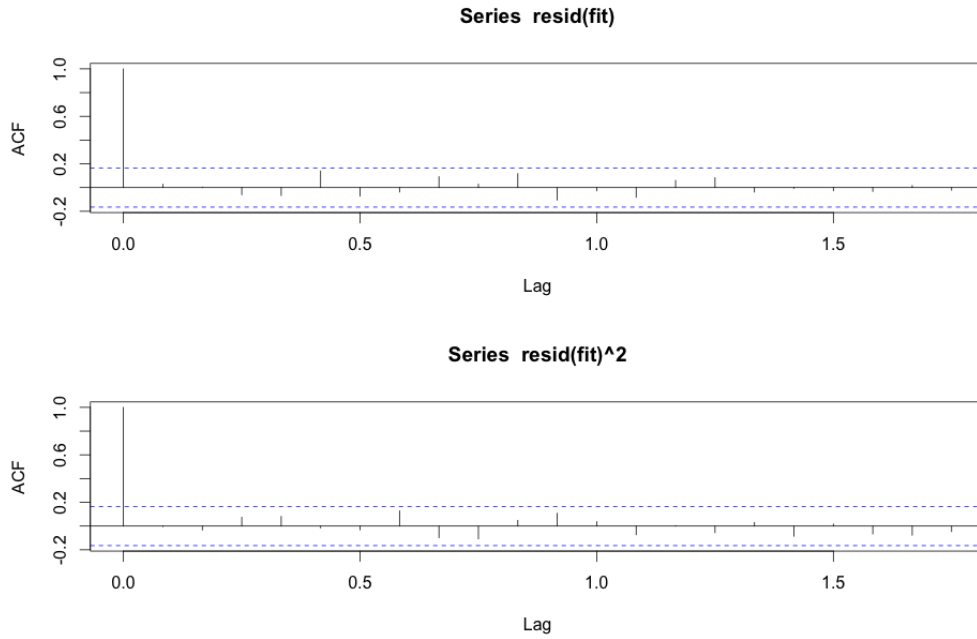
Viipeet	10	15	20	25
Testisuure	8.77	13.38	13.97	15.34
Vapausasteet	7	12	17	22
p-arvo	0.27	0.34	0.67	0.85

Taulukko 14: Box-Ljung -testisuureen arvoja logaritmoidulle Wine-aineistolle estimoidulle SARIMA(1,0,1)(0,1,1)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Testisuure	2	8.27	11.65	14.77	15.97
Vapausasteet	5	10	15	20	25
p-arvo	0.85	0.6	0.71	0.79	0.92

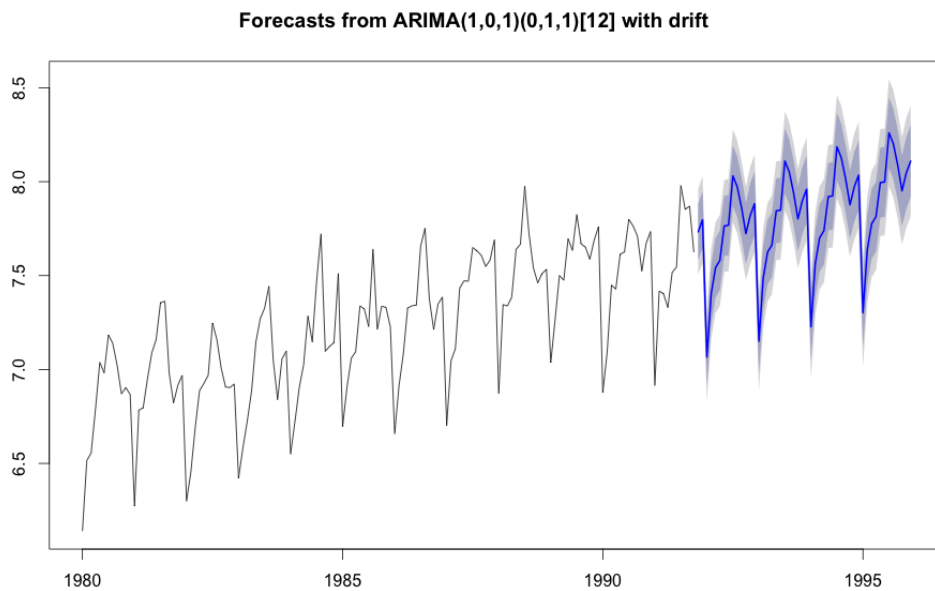
Taulukko 15: McLeod-Li -testisuureen arvoja logaritmoidulle Wine-aineistolle estimoidulle SARIMA(1,0,1)(0,1,1)-mallille.

- (ii) Valitaan informaatiokriteerien ja autokorrelaatiotarkasteluiden perusteella malliksi SARIMA(1,0,1) × (0,1,1)<sub>12</sub>, jonka parametreiksi saadaan  $\phi_1 = 0.89(0.08)$ ,  $\theta_1 = -0.68(0.13)$ ,  $\Theta_1 = -0.74(0.10)$ , vakio  $\nu = 0.0062(0.001)$  ja  $\sigma^2 = 0.013$ .
- (iii) Estimoidun SARIMA-mallin residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiotestit on esitetty taulukoissa 14 ja 15. Testien perusteella malli näyttäisi sopivan aineistoon hyvin. Tätä havaintoa tukee myös kuvassa 11 nähtävät residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiokuvaajat.



Kuva 11: Wine-aineiston SARIMA-mallin residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiot

- (iv) Estimoidun mallin ennusteet on esitetty kuvassa 12. Kuvasta nähdään ennusteen nouseva trendi, joka johtuu malliin estimoidusta vakiosta ja kausidifferenssoinnin tuottama kausivaihtelu.



Kuva 12: Logaritmoidun Wine-aineiston SARIMA-mallin ennuste 50 askelelle.