Stationaariset aikasarjat

Viikko 6, 10.11.2016

Ratkaisuehdotukset

1. (i) Käytetään kurssimateriaalin luvun 4.4 merkintöjä. Kaikilla $t = 1, \ldots, T$ on satunnaismuuttujat y_t ovat normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien affiineina muunnoksina normaalijakautuneita ja $\mathrm{E}(u_t) = 0$, joten

$$\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\boldsymbol{z_t'}\boldsymbol{\varphi}) + \mathrm{E}(u_t) = \boldsymbol{z_t'}\boldsymbol{\varphi}.$$

Tästä seuraa, että satunnaisvektorille $\boldsymbol{y}$ pätee $\mathrm{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Z_t}\boldsymbol{\varphi}$ ja

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{y}) &= E[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z_t}\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z_t}\boldsymbol{\varphi})'] \\ &= E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') \\ &= \sigma^2\boldsymbol{\Sigma},\end{aligned}$$

missä $\boldsymbol{\Sigma}$ on positiivisesti definiitti $(T \times T)$ matriisi (ks. luentomonisteen sivu 45.) Merkitään $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z_t}\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z_t}\boldsymbol{\varphi})'$. Satunnaismuuttujien y_t normaalisuudesta seuraa, että $\boldsymbol{y}$ noudattaa T-ulotteista normaalijakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = (2\pi)^{-T/2}\det(\sigma^2\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi})\right\}.$$

(ii) Kerrotaan tiheysfunktio vakiolla $(2\pi)^{T/2}$ ja otetaan siitä logaritmi, jolloin saadaan loguskottavuusfunktioksi

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \boldsymbol{y}) = -\frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\log\det(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}).$$

(iii) Asetetaan kurssimonisteen sivun 47 tapaan $\sigma^2 = T^{-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi})$, jolloin logaritmiseksi profiiliuskottavuusfunktioksi saadaan

$$\ell_p(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \boldsymbol{y}) = -\frac{T}{2}\log(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi})) - \frac{1}{2}\log\det(\boldsymbol{\Sigma}).$$

2. Olkoon nyt y_t ARMA(1,1) ja oletetaan, että $\phi = -\theta$. Monisteen sivulla 48 todetaan, että mallin parametrin $\boldsymbol{\beta}$ Fisherin informaatiomatriisi on

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\beta}) = T\sigma^{-2}\mathrm{Cov}(x),$$

missä $x = (y_1^+, y_1^*) \in \mathbb{R}^2$ kuten tehtävänannossa. Tarvitsee siis osoittaa, että $\mathrm{Cov}(x)$ on annetuilla oletuksilla singulaarinen.

Huomataan ensin, että prosessit y_t^+ ja y_t^* ovat kääntyviä ja $\mathrm{E}(y_t^+) = \mathrm{E}(y_t^*) = 0$, joten oletuksen $\phi = -\theta$ ja innovaatiotermien riippumattomuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(y_1^*, y_1^+) = \mathrm{E}(y_1^* y_1^+) &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j\varepsilon_{1-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\varepsilon_{1-j}\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\varepsilon_{1-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\varepsilon_{1-j}\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left(\sum_{j=0}\phi^{2j}\varepsilon_{1-j}^2\right) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2},\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa geometrisen sarjan ominaisuuksista. Käyttämällä luentomonisteen sivun 14 varianssitulosta AR(1)-prosesseille saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(x) &= \begin{bmatrix} \mathrm{E}(y_1^+ y_1^+) & \mathrm{E}(y_1^+ y_1^*) \\ \mathrm{E}(y_1^* y_1^+) & \mathrm{E}(y_1^* y_1^*) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} & \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\ \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} & \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}. \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla $\theta = -\phi$ huomataan, etteivät sarakevektorit ole lineaarisesti riippumattomia ja siten kovarianssimatriisi on singulaarinen.

3. (i) Taulukossa 1 esitettyjen informaatiokriteerin arvojen perusteella malli ARMA(1,1) näyttäisi parhaiten sopivalta. Myös muita vaihtoehtoja, kuten tehtävänannossa mainittu AR(2), voi pitää varteenotettavina myös tämän perusteella. Estimoidaan kuitenkin informaatiokriteerin mielessä parhaiten menestytyt malli ARMA(1,1). Tuloksena saadaan $\phi = 0.668(0.095)$, $\theta = 0.364(0.120)$, $\sigma^2 = 0.493$ ja vakio $\nu = 578.919(0.290)$, missä keskivirheet on annettu suluissa.

ARMA(0,0)	306.20
ARMA(0,1)	236.04
ARMA(0,2)	222.77
ARMA(0,3)	214.09
ARMA(1,0)	217.53
ARMA(1,1)	211.93
ARMA(2,0)	212.82
ARMA(2,1)	214.16
ARMA(2,2)	212.52

Taulukko 1: Funktion auto.arima tuottamia informaatiokriteerin (AICC) arvoja Lake-aineistolle. Malliin on estimoitu kaikissa vaihtoehdoissa mukaan vakio.

(ii) Tarkastellaan seuraavaksi aineistoon edellä sovitetun ARMA(1,1)-mallin residuaaleja. Residuaalien autokorrelaatiot on esitetty kuvassa 1. Kriittiset rajat eivät residuaalien tapauksessa ole päteviä, mutta niitä voi silti käyttää apuna tarkasteluissa. Kuvassa ei näy mitään erityisen hälyttävää ja autokorrelaatiot näyttävät olevan siististi rajojen sisäpuolella. Sama pätee myös kuvassa 2 esitetyille residuaalien neliöiden autokorrelaatioille. Myös Ljung-Box- sekä McLeod-Li-testit tuottavat suurehkoja p-arvoja, joiden perusteella nollahypoteesia residuaalien ja niiden neliöiden autokorreloimatumattomuudesta ei voida hylätä. Testien tulokset valituille viipeille on esitetty taulukoissa 2 ja 3.

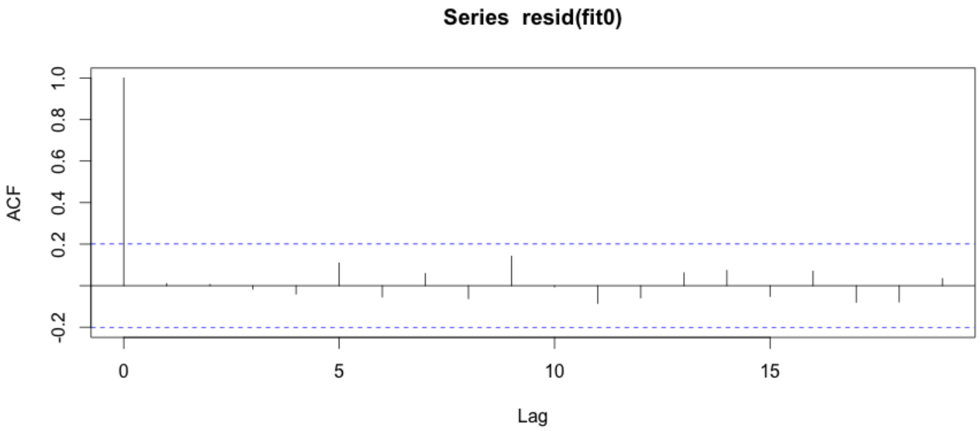
Sivuhuomautus: Sama tarkastelu edellä mainitulle AR(2)-mallille tuottaa myös samankaltaiset tulokset, joskin viipeellä 9 neliöiden autokorrelaatioon tulee aavistuksen korkeampi piikki. Tuloksia ei kuitenkaan ole tässä esitetty tarkemmin.

Viipeet	5	10	15	20	25
Vapausasteet	3	8	13	18	23
Testisuure	1.42	4.67	7.21	13.08	15.77
p-arvo	0.70	0.79	0.89	0.79	0.87

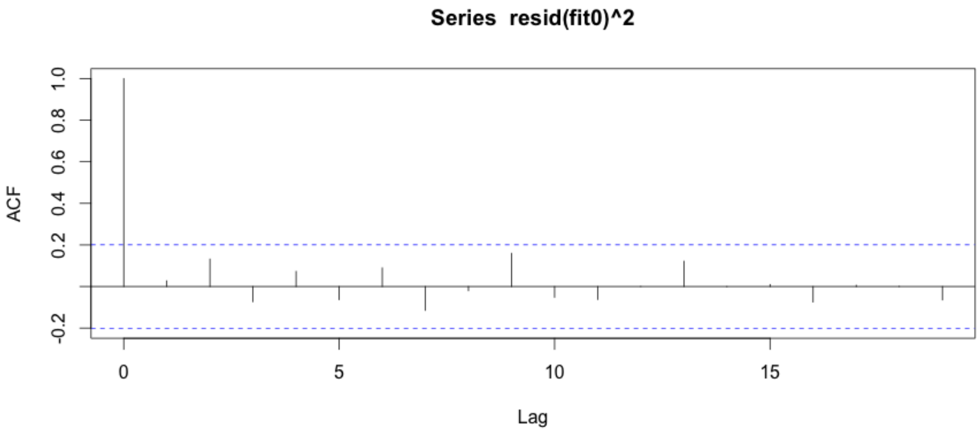
Taulukko 2: Box-Ljung -testisuureen arvoja Lake-aineistolle estimoidulle ARMA(1,1)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Vapausasteet	5	10	15	20	25
Testisuure	3.29	8.58	10.69	12.13	19.10
p-arvo	0.66	0.57	0.77	0.91	0.79

Taulukko 3: McLeod-Li -testisuureen arvoja Lake-aineistolle estimoidulle ARMA(1,1)-mallille.

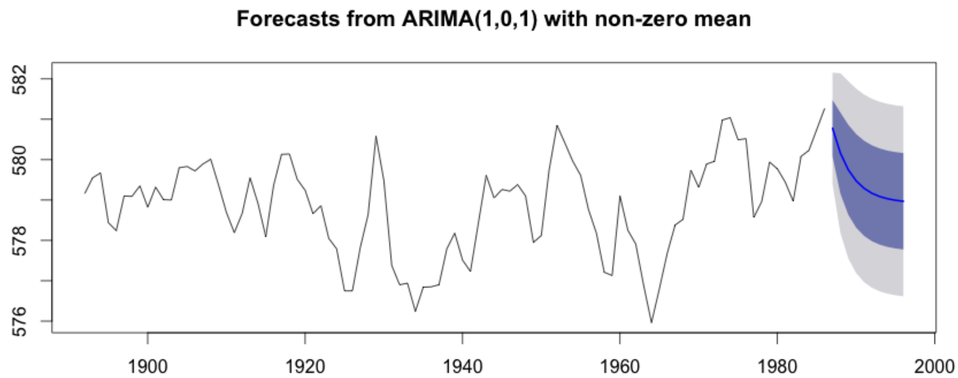


Kuva 1: Lake-aineiston ARMA(1,1) -mallin residuaalien autokorrelaatiot



Kuva 2: Lake-aineiston ARMA(1,1) -mallin residuaalien neliöiden autokorrelaatiot

(iii) Kuvassa 3 on esitetty ennuste ARMA(1,1)-mallin avulla Lake-aineistolle, kun ennustehorisontti on 10. Kuvassa on piirretty 95%- ja 68%-luottamusvälit. Ennusteen nähdään konvergoivan hitaasti kohti prosessin odotusarvoa, kuten ARMA-mallin saattaa olettaakin.



Kuva 3: Lake-aineiston ARMA(1,1) -mallin ennuste, kun ennustehorisontti on 10.

4. Drought-aineistolle R:n funktio auto.arima ehdottaa tehtävänannossakin ehdotettua AR(5)-mallia (ilman vakiota) AICC:n arvolla 538.99. Vastaavasti myös kiinnostuksen kohteena olleelle AR(1)-mallille AICC on 539.14 (ilman vakiota). Mallien informaatiokriteerien arvot on esitetty taulukossa 4, jossa mallit on estimoitu ilman vakiota. Vakion kanssa mallien informaatiokriteerit olivat säännönmukaisesti vakiottomia suurempia.

ARMA(0,2)	539.91
ARMA(0,5)	539.97
ARMA(1,0)	539.14
ARMA(1,1)	539.69
ARMA(2,0)	539.83
ARMA(2,1)	541.97
ARMA(3,0)	541.97
ARMA(5,0)	538.99

Taulukko 4: Funktion auto.arima tuottamia informaatiokriteerin (AICC) arvoja Drought-aineistolle. Malli on estimoitu ilman vakiota.

Viipeet	10	15	20	25
Vapausasteet	5	10	15	20
Testisuure	2.19	7.99	12.10	16.47
p-arvo	0.82	0.63	0.67	0.69

Taulukko 5: Box-Ljung -testisuureen arvoja Drought-aineistolle estimoidulle AR(5)-mallille.

Viipeet	5	10	15	20	25
Vapausasteet	5	10	15	20	25
Testisuure	1.84	8.53	13.15	21.28	28.51
p-arvo	0.87	0.58	0.59	0.38	0.28

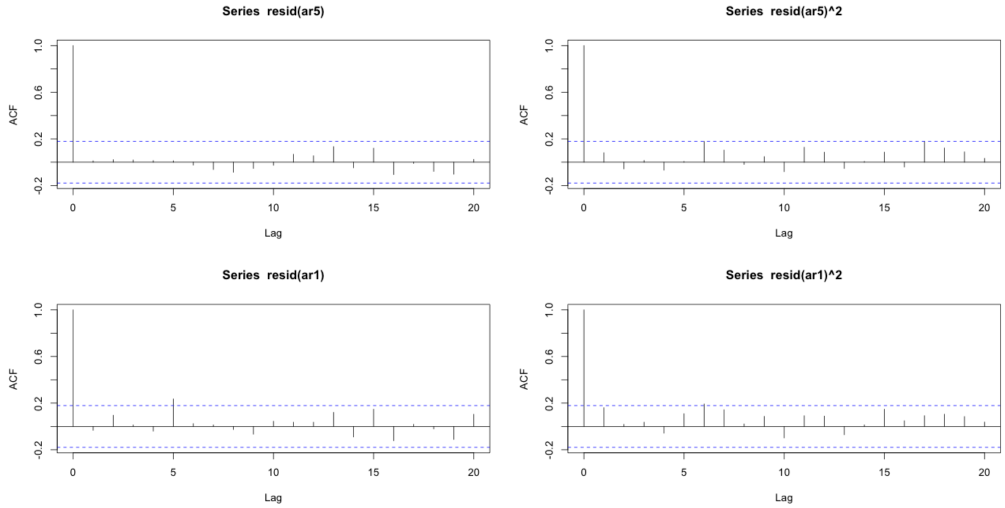
Taulukko 6: McLeod-Li -testisuureen arvoja Drought-aineistolle estimoidulle AR(5)-mallille.

Tutkitaan näiden residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatioita kuvassa 4. Kuvien perusteella mallit suodattavat hyvin aineiston mahdolliset autokorrelaatiot, mutta AR(5) -malli näyttäisi sopivan aineistoon ehkä hieman paremmin.

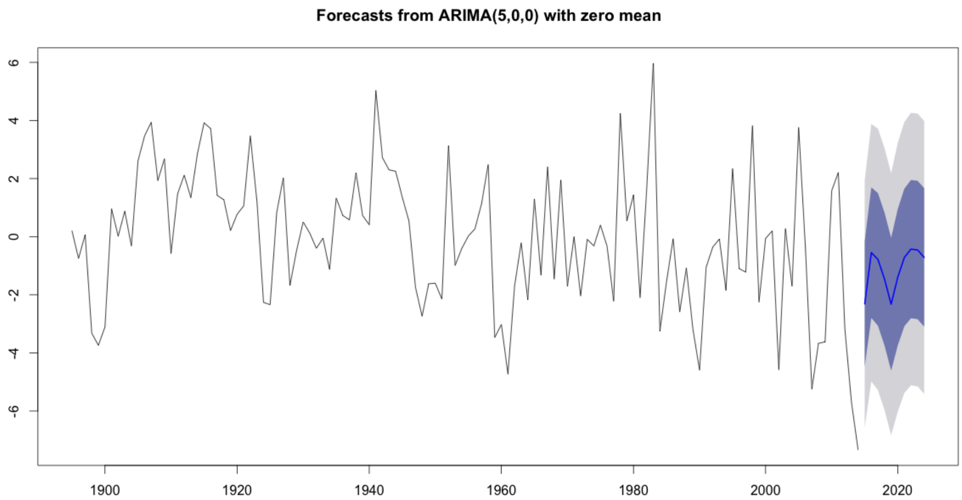
Boxin ja Ljungin testisuureen arvot AR(5)-mallin residuaaleille valituilla viipeillä on esitetty taulukossa 5 ja McLeodin ja Lin testisuureet taulukossa 6. Tulosten perusteella nollahypoteesia residuaalien tai niiden neliöiden autokorreloitumattomuudesta ei ole syytä hylätä.

Estimaateiksi AR(5)-mallille saadaan $\phi_1 = 0.30(0.090)$, $\phi_2 = 0.10(0.095)$, $\phi_3 = -0.04(0.096)$, $\phi_4 = -0.03(0.096)$ ja $\phi_5 = 0.26(0.094)$. AR-kertoimet ovat pieniä suhteessa keskivirheisiinsä viipeillä 2,3 ja 4, mistä johtuen niiden rajoittaminen nollaksi voisi olla myös yksi mahdollisuus.

Lasketaan vielä ennusteet käyttäen edellä sovitettua AR(5)-mallia. Ennusteet ja luottamusvälit ennustehorisontille 10 on esitetty kuvassa 5.



Kuva 4: Drought-aineiston residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiot malleille AR(5) (ylärivi) ja AR(1) (alarivi).



Kuva 5: Drought-aineiston AR(5)-mallin ennuste, kun ennustehorisontti on 10.