Stationaariset aikasarjat

Viikko 5, 13.10.2016

Ratkaisuehdotukset

1. Ratkaisemalla x_t prosessin yhtälöstä ja sijoittamalla kaavaan $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ voidaan prosessi kirjoittaa muodossa

$$y_{t+h} = (1-\phi)(\alpha + \beta(t+h-1)) + \phi y_{t+h-1} + \beta + \varepsilon_{t+h},$$

jolloin rekursiivisesti sijoittamalla saadaan

$$y_{t+h} = (1-\phi^h)(\alpha + \beta t) + \phi^h y_t + \beta h + \sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j}.$$

Siten prosessin (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen ennuste on

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t(y_{t+h}) &= (1-\phi^h)(\alpha + \beta t) + \phi^h y_t + \beta h \\ &= \alpha + \beta(t+h) + \phi^h (y_t - \alpha - \beta t) \end{aligned}$$

ja ennustevirheeksi saadaan

$$y_{t+h} - \mathrm{E}_t(y_{t+h}) = \sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j}.$$

Ennustevirheen varianssi on riippumattomuuden nojalla

$$\sigma_h^2 = \mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j}) = \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} \sigma^2 = \frac{(1-\phi^{2h})}{1-\phi^2} \sigma^2,$$

jossa esiintyvä (ei-satunnainen) geometrinen sarja suppenee h:n kasvaessa rajatta kun $|\phi| < 1$, jolloin

$$\lim_{h \to \infty} \sigma_h^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}.$$

Virhetermien riippumattomuuteen perustuvat 95% -luottamusrajat saadaan muotoon

$$\lim_{h \to \infty} \alpha + \beta(t+h) + \phi^h (y_t - \alpha - \beta t) \pm 1.96 \frac{(1-\phi^{2h})}{1-\phi^2} \sigma^2 = \infty$$

Vaikka luottamusvälin leveys suppenee kohti vakiota, sen ylä- ja alaraja kasvavat rajatta luottamusvälin keskipisteen mukana kun $h \to \infty$.

2. (i) Kirjoitetaan prosessin kaavaa rekursiivisesti auki

$$\begin{aligned} \Delta y_{t+h} &= \phi \Delta y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} \\ &= \phi^2 \Delta y_{t+h-2} + \phi \varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} \\ &\vdots \\ &= \phi^h \Delta y_t + \sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j}. \end{aligned}$$

Odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t(y_{t+h}) + \mathrm{E}_t(y_{t+h-1}) &= \mathrm{E}_t(\Delta y_{t+h}) \\ &= \mathrm{E}_t(\phi^h \Delta y_t + \sum_{j=0}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j}) \\ &= \phi^h \Delta y_t. \end{aligned}$$

(ii) Kirjoitetaan tehtävänannon vihjeen mukaisesti

$$y_{t+h} = y_t + \Delta y_{t+1} + \cdots + \Delta y_{t+h}.$$

Ottamalla tästä puolittain ehdollinen odotusarvo saadaan edellisen kohdan ja geometrisen summan nojalla

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h}) = y_t + \phi \Delta y_t + \phi^2 \Delta y_t + \cdots + \phi^h \Delta y_t = y_t + \frac{\phi(1-\phi^h)}{1-\phi} \Delta y_t.$$

(iii) Valinnalla $\phi = 0$ prosessista y_t tulee satunnaiskulku ja

$$\begin{aligned} y_{t+h} &= y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} \\ &\vdots \\ &= y_t + \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_{t+j}. \end{aligned}$$

Käyttäen edellisten kohtien tuloksia saadaan ennustevirhe

$$y_{t+h} - \mathrm{E}_t(y_{t+h}) = \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_{t+j},$$

jonka odotusarvo on selvästi 0. Riippumattomuuden nojalla ennustevirheen varianssi σ_h^2 on

$$\sigma_h^2 = \mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{h} \varepsilon_{t+j}) = h\sigma^2.$$

Selvästi $\sigma_h^2 \to \infty$ kun $h \to \infty$ ja siten myös riippumattomuusoletukseen perustuvat luottamusrajat

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h}) \pm 1.96\sigma_h \to \pm\infty.$$

3. (i) Kirjoitetaan prosessi tehtävänannon vihjeen avulla muotoon

$$\begin{aligned} \Delta(y_{t+h} - \beta(t+h)) &= \phi \Delta(y_{t+h-1} - \beta(t+h-1)) + \varepsilon_{t+h} \\ &= \phi^h \Delta(y_t - \beta t) + \sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j}, \end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus saadaan rekursiivisesti sijoittamalla ja kirjoittamalla differensointioperaattoreita hieman auki saadaan

$$\begin{aligned} \Delta y_{t+h} &= \phi^h \Delta y_t - \phi^h \beta + \sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j} + \beta \\ &= \phi^h \Delta y_t + \sum_{j=1}^{h} \phi^{h-j} \varepsilon_{t+j} + \frac{1-\phi^h}{1-\phi} \nu. \end{aligned}$$

Edellisen tehtävän tapaan

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t(y_{t+h}) &= y_t + \mathrm{E}_t(\Delta y_{t+1}) + \cdots + \mathrm{E}_t(\Delta y_{t+h}) \\ &= y_t + \sum_{j=1}^{h} \left(\phi^j \Delta y_t + \frac{1-\phi^j}{1-\phi} \nu \right) \\ &= y_t + \sum_{j=1}^{h} \left(\phi^j \Delta y_t + \frac{\nu}{1-\phi} - \frac{\phi^j}{1-\phi} \right). \end{aligned}$$

(ii) Olkoon nyt $\phi = 0$, jolloin päädytään taas satunnaiskulkuun

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \nu + \varepsilon_t && \Leftrightarrow \\ y_t &= y_{t-1} + \nu + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Ennustevirhe saadaan muotoon

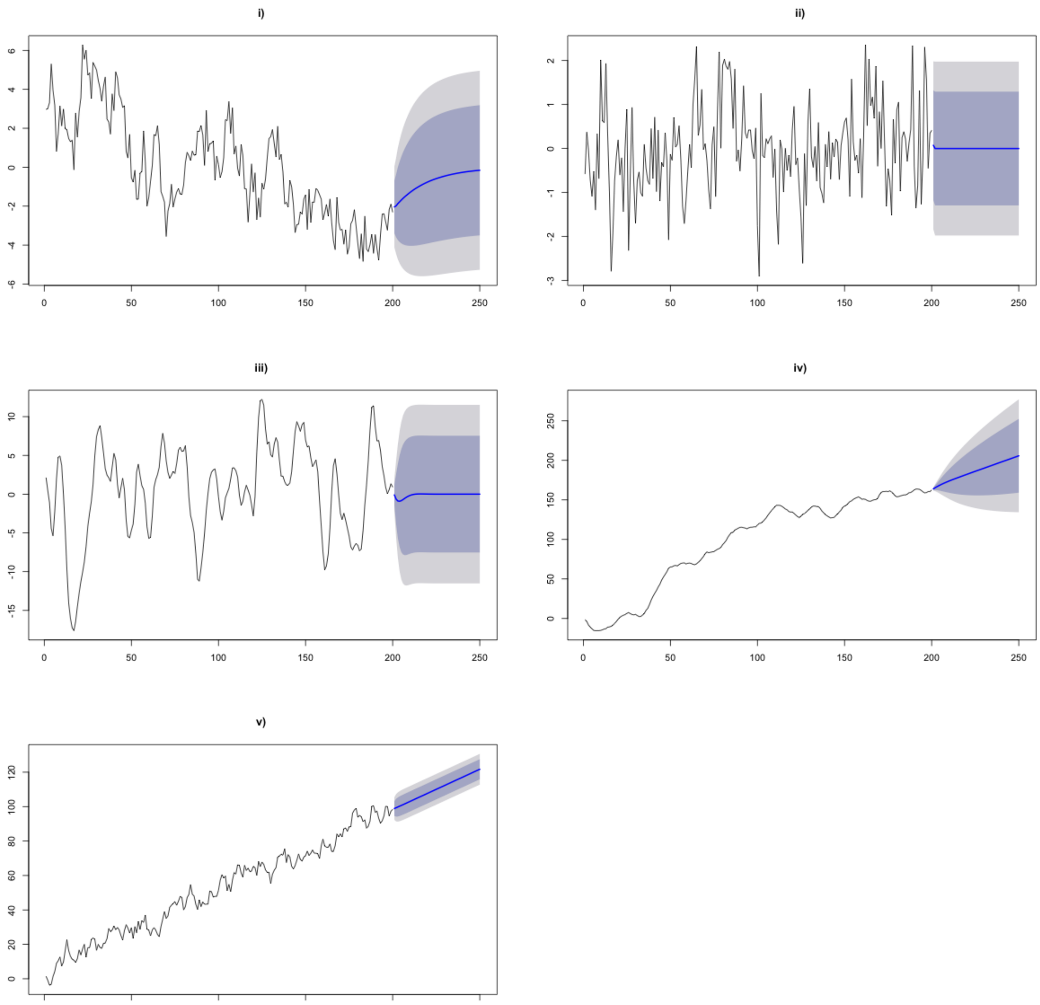
$$\begin{aligned} y_{t+h} - \mathrm{E}_t(y_{t+h}) &= y_t + h\nu + \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_{t+j} - \left(y_t + \sum_{j=1}^{h} \nu \right) \\ &= \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_{t+j}. \end{aligned}$$

Äskeisen tehtävän tapaan prosessin ennustevirheen varianssi kasvaa rajatta h:n kasvaessa rajatta. Tässä tapauksessa ennusteen kaavan perusteella myös luottamusvälin keskipiste kasvaa rajatta samalla kun riippumattomuusoletukseen perustuvat luottamusrajat hajaantuvat.

4. Tehtävän sarjat ja niiden ennusteet on esitetty kuvassa 1. Reaalisaatiot on simuloitu tehtävämonisteessa ehdotettuja arvoja käyttäen. Ruudusta (i) nähdään AR-prosessin hitaasti kohti prosessin odotusarvoa suppeneva ennuste. ARMA(2,1)-mallille käy ruudussa (iii) oleellisesti samoin kuin AR-mallille ja ennuste suppenee hitaasti kohti prosessin odotusarvoa.

Ruudussa (ii) nähdään, että MA(4)-prosessin ennusteen vaihtelu katkeaa äkillisesti neljän viipeen jälkeen. Tämä johtuu siitä, että MA-prosessi riippuu menneistä arvoistaan vain astelukuunsa asti.

Sekä trendistationaariselle mallille että ARIMA-mallille ruuduissa (iv) ja (v) ennusteen nähdään asettuvan trendisuoralle, mutta trendistationaarisessa tapauksessa luottamusrajat jäävät tasaisella leveydellä ennusteen ympärille. Tämä tulos on havaittavissa myös tehtävän 1 tuloksesta, jossa huomataan trendistationaarisen prosessin ennusteen luottamusvälin leveyden suppenevan kohti vakiota keskiarvon kasvaessa rajatta.



Kuva 1: Simuloidut sarjat ja niiden ennusteet