

Stationaariset aikasarjat

Viikko 4, 6.10.2016

Ratkaisuehdotukset

1. (i) Lasketaan ensin prosessin havaintojen välinen autokovarianssi

$$\begin{aligned}\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \text{Cov}(y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1+h} + \varepsilon_{t+h}) \\ &= \text{Cov}(y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-2+h} + \varepsilon_{t+h} + \varepsilon_{t-1+h}) \\ &= \dots \\ &= \text{Cov}(y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1} + \varepsilon_{t+h} + \varepsilon_{t-1+h} + \dots + \varepsilon_t) \\ &= \text{Var}(y_t).\end{aligned}$$

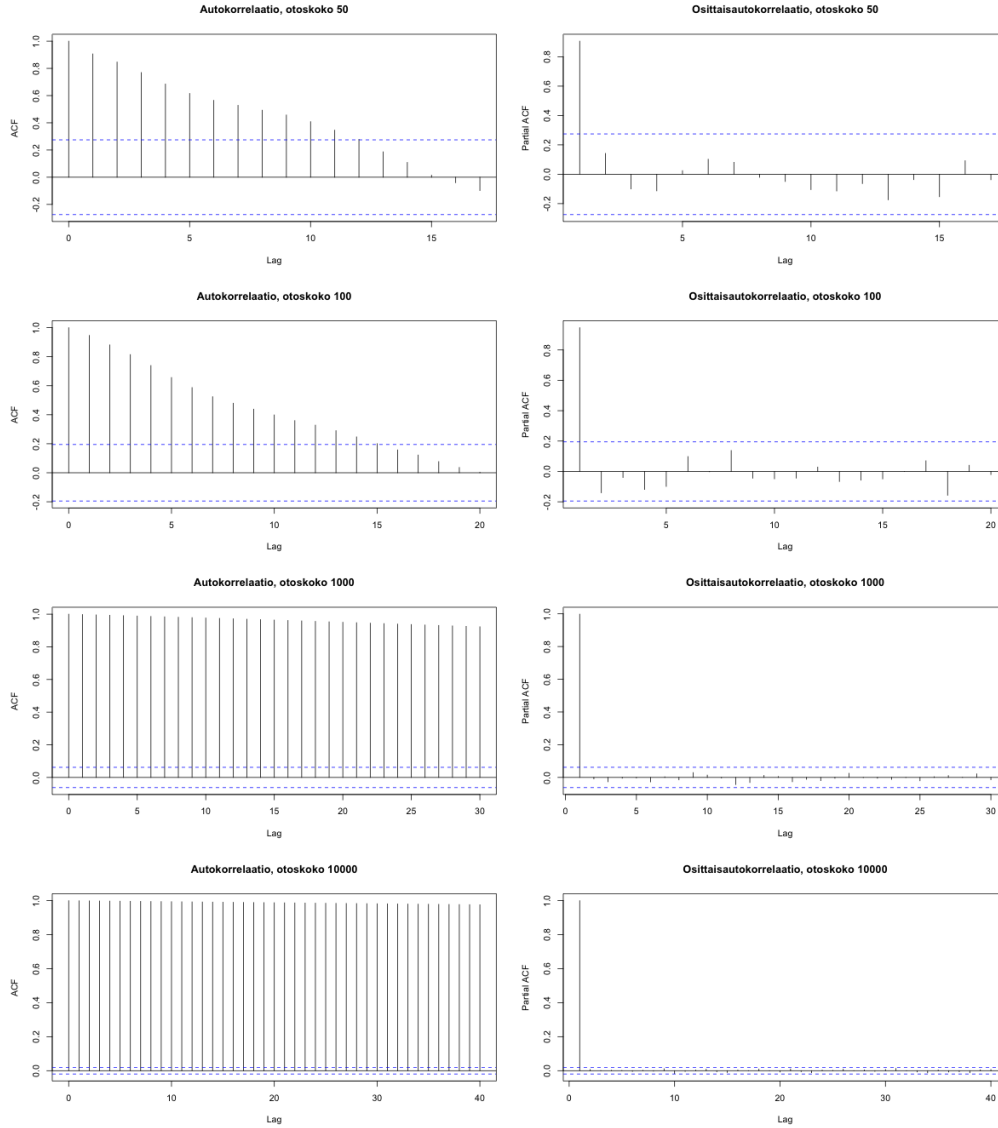
Oletuksesta $y_0 = 0$ seuraa

$$\text{Var}(y_t) = \sum_{i=1}^t \text{Var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2.$$

Niinpä

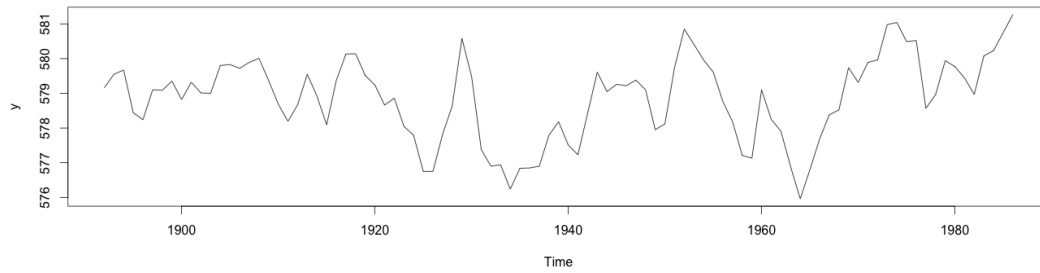
$$\begin{aligned}\text{Cor}(y_t, y_{t+h}) &= \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(y_t)\text{Var}(y_{t+h})}} \\ &= \frac{t\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2(t+h)\sigma^2}} \\ &= \frac{t\sigma^2}{\sigma^2\sqrt{t^2+th}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+h/t}}.\end{aligned}$$

- (ii) Selvästi $\text{Cor}(y_t, y_{t+h}) \rightarrow 1$, kun $t \rightarrow \infty$ kaikilla $h \in \mathbb{N}$.
- (iii) Simuloidun satunnaiskulun auto- ja osittaisautokorrelaatiot on esitetty kuvassa 1, kun otoskoko $t=50, 100, 1000$ ja 10000 . Kuvasta voidaan nähdä edellisessä kohdassa osoitetun raja-arvotuloksen vaikutus: kaikilla h autokorrelaatiofunktion arvo lähenee yhtä, kun otoskoko kasvatetaan. Toisaalta samalla osittaisautokorrelaatio pysyy nollan tuntumassa kaikilla $h > 1$ ja keskittyy lähemmäs nollaa otoskoon kasvaessa.

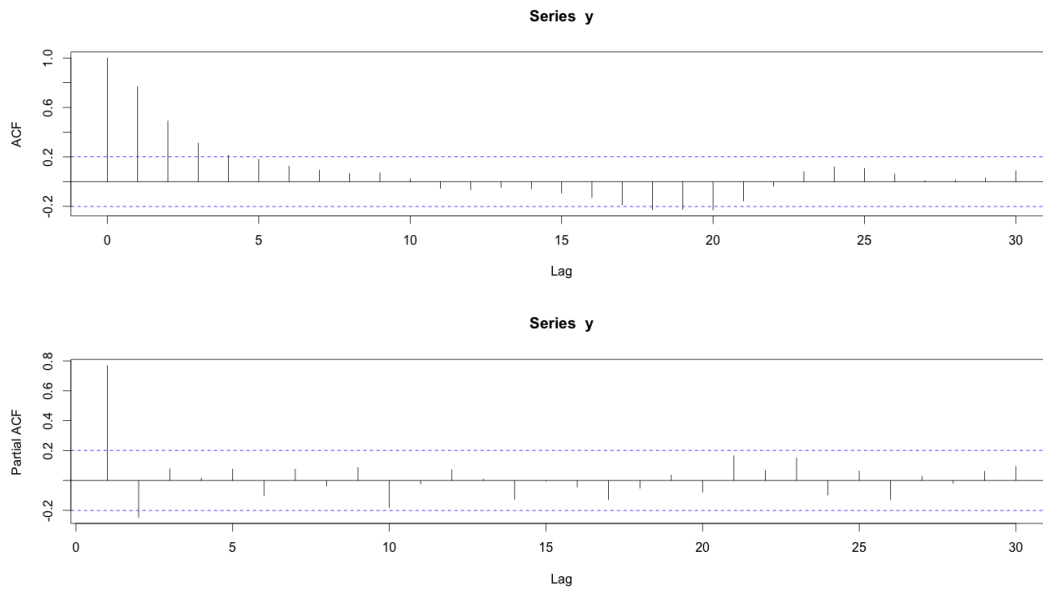


Kuva 1: Simuloidun satunnaiskulun auto- ja osittaisautokorrelaatiot, kun $t=50, 100, 1000$ ja 10000 .

2. Tarkastellaan Huron-järven pinnan keskimääräistä vuotuista korkeutta vuosina 1892-1986. Tehtävän aikasarja on esitetty kuvassa 2 ja sarjan estimoidut auto- ja osittaisautokorrelaatiot on esitetty kuvassa 3. Autokorrelaatiot vaimenevat hitaasti geometrisen sarjan kerrointen tapaan ja osittaisautokorrelaatiot jäävät kriittisen rajan alle toisen viipymän jälkeen. Tässä tapauksessa kuvien perusteella voisi päätellä aineiston noudattavan AR(2)-prosessia. Toisaalta toinen piikki on melko maltillinen, joten AR(1) on myös hyvä arvaus.

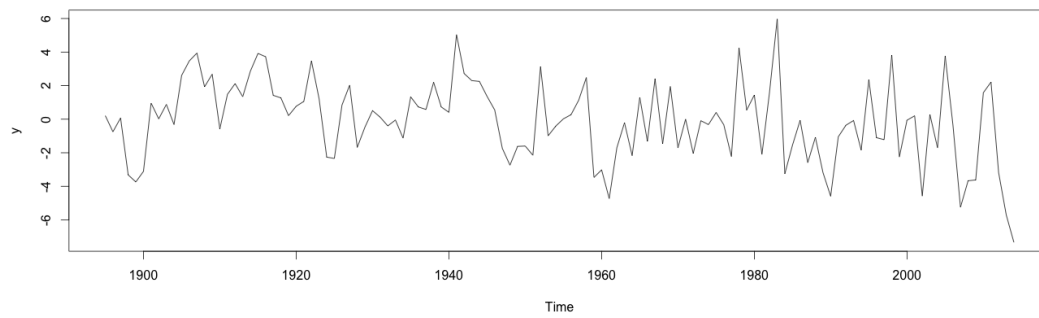


Kuva 2: Huron-järven pinnan keskimääräinen vuotuinen korkeus vuosina 1892-1986

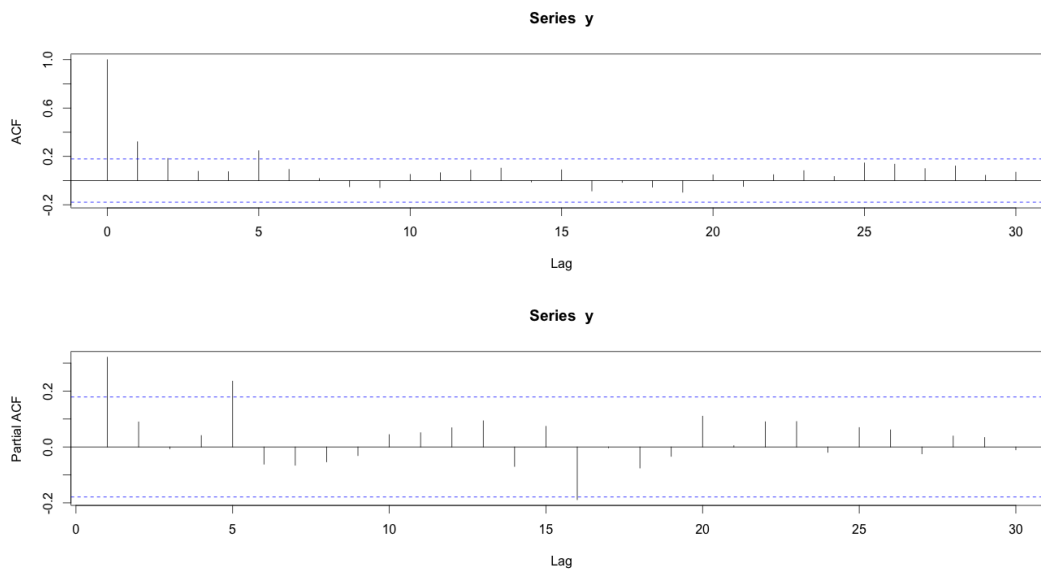


Kuva 3: Estimoidut auto- ja osittaisautokorrelaatiot Huron-järven pinnan keskimääräiselle korkeudelle vuosittain

3. Tarkastellaan PDSI -kuivuusindeksiä vuosina 1895-2014. Tehtävän aikasarja on esitetty kuvassa 4 ja sarjan estimoidut auto- ja osittaisautokorrelaatiot on esitetty kuvassa 5. Tällä kertaa autokorrelaatioissa ei ole nähtävissä yhtä siistiä vaimenemista kuin tehtävässä 2, eikä osittaisautokorrelaatioissakaan ole samanlaista selkeää katkeamista. Kuitenkin, koska molemmissa kuvissa näkyy piikki viidennellä viipymällä ja autokorrelaation vaimeneminen on jossain määrin tasaista, AR(5) voisi olla hyvä arvaus. Koska viidennen viipymän piikki on kuitenkin melko pieni, myös AR(1) voisi olla hyvä arvaus.



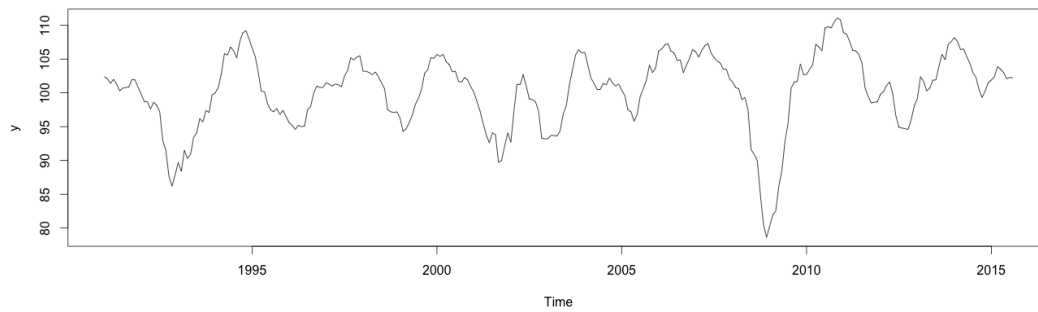
Kuva 4: PDSI -kuivuusindeksi vuosina 1895-2014



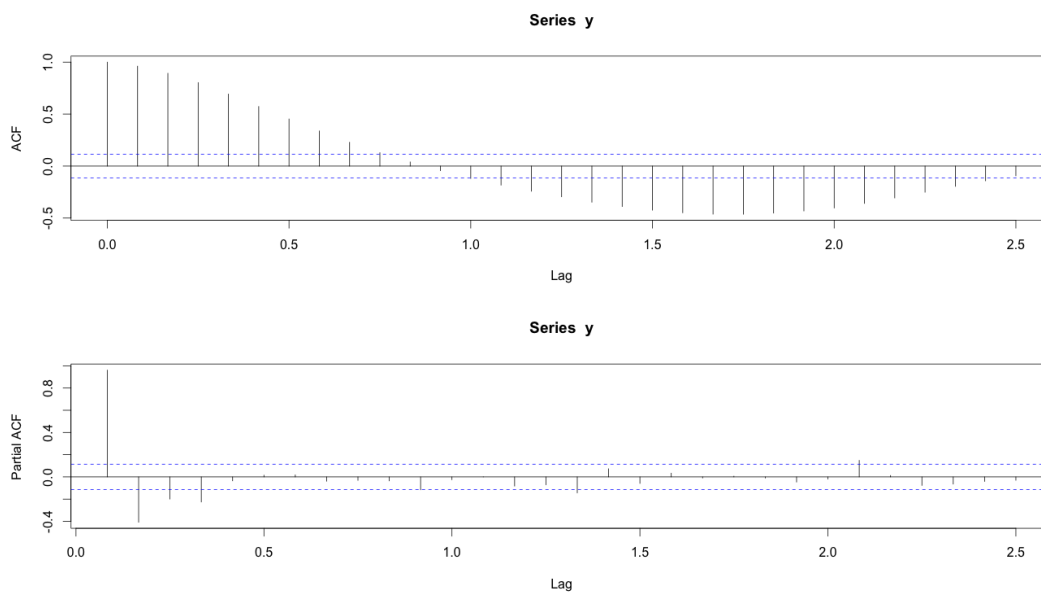
Kuva 5: Estimoidut auto- ja osittaisautokorrelaatiot PDSI -kuivuusindeksille

4. Tarkastellaan saksalaisten yritysten liiketoiminnan odotuksia kuvaavaa kuukausittaista indeksiä ajanjaksolta 1991I-2015XII. Tehtävän aikasarja on esitetty kuvassa 6 ja sarjan estimoidut auto- ja osittaisautokorrelaatiot on esitetty kuvassa 7.

Aikasarjasta voidaan nähdä, että se on vahvasti autokorreloitunut ja tämä näkyy myös autokorrelaatiokuvasta (vrt. tehtävän 1 simulaatiot). Osittaisautokorrelaatiot funktio katkeaa neljän viipeen jälkeen, jonka voisi yhdessä edellä mainitun kanssa päätellä viittavan malliin $AR(4)$. Kaksi ensimmäistä osittaisautokorrelaatiota ovat huomattavan voimakkaita kahteen seuraavaan nähden, joten myös $AR(2)$ voisi päätellä sopivan aineistoon.



Kuva 6: Saksalaisten yritysten liiketoiminnan odotuksia kuvaava kuukausittainen indeksi ajanjaksolla 1991I-2015XII



Kuva 7: Estimoidut auto- ja osittaisautokorrelaatiot liiketoiminnan odotuksia kuvaavalle indeksille