# Stationaariset aikasarjat

**Viikko 2, 22.9.2016**

**Ratkaisuehdoitukset**

**1.** Olkoon $x_t$ ja $z_t$ kuten tehtävänannossa ja merkitään $y_t = x_t + z_t$. Tällöin

$$E(y_t) = E(x_t) + E(z_t)$$

ja

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+h})\\ &= E(y_t y_{t+h}) - E(y_t)E(y_{t+h}).\end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned}&E(y_t)E(y_{t+h})\\ =&E(x_t + z_t)E(x_{t+h} + z_{t+h})\\ =&E(x_t)E(x_{t+h}) + E(x_t)E(z_{t+h}) + E(z_t)E(x_{t+h}) + E(z_t)E(z_{t+h})\end{aligned}$$

ja

$$E(y_t y_{t+h}) = E(x_t x_{t+h}) + E(x_t z_{t+h}) + E(z_t x_{t+h}) + E(z_t z_{t+h}),$$

Termejä yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \mathrm{Cov}(x_t, x_{t+h}) + \mathrm{Cov}(x_t, z_{t+h}) + \mathrm{Cov}(z_t, x_{t+h}) + \mathrm{Cov}(z_t, z_{t+h})\\ &= \mathrm{Cov}(x_t, x_{t+h}) + \mathrm{Cov}(z_t, z_{t+h}).\end{aligned}$$

Summan odotusarvo ja kovarianssifunktio riippuvat vain prosessien $x_t$ ja $z_t$ vastaavista. Koska $x_t$ ja $z_t$ ovat heikosti stationaarisia, on tällöin myös niiden summa heikosti stationaarinen.

**2.** (i) Olkoon tehtävänannon mukaisesti $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, missä $|\phi| > 1$ ja $\varepsilon \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2)$. Rekursiivisesti sijoittamalla (tai kurssimonisteen perusteella) saadaan

$$y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} \varepsilon_{t+j}.$$

Tästä muodosta nähdään, että $E(y_t) = 0$. Innovaatiotermit ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, joten odotusarvon lineaarisuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned}\gamma_h &= E\left[(\sum_{i=1}^{\infty} \phi^{-i}\varepsilon_{t+i})(\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j}\varepsilon_{t+h+j})\right]\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E\left[\phi^{-i}\varepsilon_{t+i}(\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j}\varepsilon_{t+h+j})\right]\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-2j-h} E(\varepsilon_t^2)\\ &= \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-2j-h}\\ &= \sigma^2 \frac{\phi^{-2-h}}{1-\phi^{-2}}\\ &= \sigma^2 \frac{\phi^{-h}}{\phi^2 - 1}.\end{aligned}$$

(ii) Oletetaan $|\phi| < 1$. Kurssimonisteen mukaan autokovarianssifunktio on tällöin

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \sigma^2 \frac{\phi^h}{1-\phi^2} \\ &= \left(\frac{\sigma}{\phi}\right)^2 \frac{\left(\frac{1}{\phi}\right)^{-h}}{\left(\frac{1}{\phi}\right)^2 - 1},\end{aligned}$$

missä oletuksen nojalla $|1/\phi| > 1$. Edellisen tehtävän perusteella nähdään, että autokovarianssifunktio on sama kuin ei-kausaalisen AR(1)-prosessin, jolla on AR-kerroin $1/\phi$ ja virhevarianssi $\sigma^2/\phi^2$.

**3.** Kirjoitetaan ARMA(1,1)-prosessi käyttäen viivästysoperaattoria B

$$\frac{1+\theta B}{1-\phi B} = \psi(B),$$

mistä kertomalla $(1-\phi B)$:llä saadaan

$$\begin{aligned}1+\theta B &= (1-\phi B)\psi(B) \\ &= (1-\phi B)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \\ &= \psi_0 + (\psi_1 - \phi\psi_0)B + (\psi_2 - \phi\psi_1)B^2 + \dots\end{aligned}$$

Tehtävänannon vihjeen mukaisesti asettamalla kertoimet yhtäsuuriksi saadaan yhtälöt

$$\begin{cases}\psi_0 & = 1 \\ \psi_1 - \phi\psi_0 & = \theta \\ \psi_2 - \phi\psi_1 & = 0 \\ \psi_3 - \phi\psi_2 & = 0 \\ \vdots & \end{cases}.$$

Rekursiivisesti sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= \theta + \phi \\ \psi_2 &= \phi(\theta + \phi) \\ \psi_3 &= \phi^2(\theta + \phi) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Siis

$$\psi_j = \begin{cases}1, & j = 0 \\ \phi^{j-1}(\theta+\phi), & \text{muulloin.}\end{cases}$$

Sijoittamalla nähdään, että tapauksessa $\theta = -\phi$ pätee $\psi_j = 1$ kun $j = 0$ ja muutoin $\psi_j = 0$. Lisäksi koska $y_t = \varepsilon_t$ saadaan

$$\gamma_h = \begin{cases}\sigma^2, & h = 0 \\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

**4.** Olkoon $y_t$ satunnaiskulku $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, missä $\varepsilon \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ja $y_0 =$. Havaitaan ensin, että

$$\overline{y} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(T-t+1)\varepsilon_t,$$

mistä odotusarvon lineaarisuuden nojalla nähdään, että $E(\overline{y}) = 0$. Lisäksi innovaatiotermien riippumattomuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(T-t+1)\varepsilon_t) &= T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{Var}((T-t+1)\varepsilon_t) \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{T}(T-t+1)^2}{T^2}\sigma^2 \\
&\geq \frac{T}{3}\sigma^2,
\end{aligned}$$

missä epäyhtälö seuraa tuloksesta

$$\sum_{t=1}^{T}(T-t+1)^2 = \frac{T^3}{3} + \frac{T^2}{2} + \frac{T}{6} \geq \frac{T^3}{3}$$

kaikilla $T \geq 0$. Tästä nähdään, että $\overline{y}$:n varianssi kasvaa rajatta, kun $T \to \infty$.