Stationaariset aikasarjat

Viikko 1, 15.9.2016

Ratkaisuehdoitukset

1. Odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$E(y_t) = \cos(\lambda t)E(A) + \sin(\lambda t)E(B) = 0.$$

Merkitään $a = \lambda t$ ja $b = \lambda(t+h)$, jolloin $a-b = \lambda h$. Autokovarianssi saadaan laskemalla odotusarvo tulolle

$$\begin{aligned}
&E\left[(A\cos(a) + B\sin(a))\left(A\cos(b) + B\sin(b)\right)\right] \\
=&E(A^2\cos(a)\cos(b) + B^2\sin(a)\sin(b)) \\
=&\sigma^2(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)) \\
=&\sigma^2\cos(a-b) \\
=&\sigma^2\cos(\lambda h).
\end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa satunnaismuuttujien A ja B korreloimattomuudesta ja toinen odotusarvon lineaarisuudesta. Prosessin y_t odotusarvo on vakio ja autokovarianssifunktio riippuu vain havaintojen etäisyydestä h. Prosessi on siten heikosti stationaarinen.

2. Innovaatiotermien ε_t riippumattomuudesta ja odotusarvon lineaarisuudesta seuraa

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t)E\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2} = 0,$$

jota käyttäen saadaan laskettua varianssi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(y_t) =&E(y_t^2) \\
=&E(\varepsilon_t^2(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2)) \\
=&\sigma^2\omega + \sigma^4\alpha.
\end{aligned}$$

Olkoon $h = 1$. Tällöin autokovarianssi on

$$\begin{aligned}
\gamma_1 =& E(\varepsilon_t\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2}\varepsilon_{t+1}\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_t^2}) \\
=&E(\varepsilon_{t+1})E(\varepsilon_t\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2}\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_t^2}) = 0.
\end{aligned}$$

Olkoon nyt $h > 1$. Tällöin innovaatiotermien riippumattomuuden nojalla $\gamma_h = E(y_t y_{t+h}) = E(y_t)E(y_{t+h}) = 0$.

Prosessi y_t on siis heikkoa valkoista kohinaa.

3. (i) Prosessin y_t odotusarvo on $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t)E(\varepsilon_{t-1}) = 0$ ja varianssi saadaan riippumattomuuden nojalla $\mathrm{Var}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t)\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^4$.

Olkoon $h > 0$. Nyt autokovarianssi saadaan riippumattomuuden nojalla

$$\gamma_h = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+h}) = E(\varepsilon_{t-1})E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+h}\varepsilon_{t+h-1}) = 0.$$

Siis prosessi y_t on heikkoa valkoista kohinaa.

(ii) Lasketaan odotusarvo ja autokovarianssifunktio prosessille y_t^2:

$$E(y_t^2) = E(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = E(\varepsilon_t^2)E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma^4.$$

Normaalijakauman ominaisuuksista tiedetään, että $E(\varepsilon_t^4) = 3\sigma^4$ ja siten

$$\begin{aligned}
\gamma_h &= \mathrm{Cov}(y_t^2, y_{t+h}^2) \\
&= E\left[(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^4)(\varepsilon_{t+h}^2\varepsilon_{t+h-1}^2 - \sigma^4)\right] \\
&= \sigma^8 - E(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2)\sigma^4 - E(\varepsilon_{t+h}^2\varepsilon_{t+h-1}^2)\sigma^4 + E(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t+h}^2\varepsilon_{t+h-1}^2) \\
&= E(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t+h}^2\varepsilon_{t+h-1}^2) - \sigma^8 \\
&= \begin{cases} 9\sigma^8 - \sigma^8 = 8\sigma^8, & h = 0 \\ 3\sigma^8 - \sigma^8 = 2\sigma^8, & h = 1\ . \\ \sigma^8 - \sigma^8 = 0, & h > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Prosessin y_t^2 odotusarvot ja autokovarianssit ovat riippumattomia ajanhetkestä t, joten y_t^2 on heikosti stationaarinen.

(iii) Prosessi y_t ei ole iid, sillä tällöin y_t^2 ja y_{t-1}^2 pitäisi olla riippumattomia ja pätisi $\gamma_h = 0$ kaikilla $h \geq 1$. Nyt $\gamma_1 > 0$, joten y_t ei voi olla vahvaa valkoista kohinaa.

4. (i) Derivoimalla autokorrelaatiokerrointa parametrin θ suhteen saadaan

$$\rho_1' = \frac{d}{d\theta}\rho_1 = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm 1.$$

Havaitaan lisäksi, että $\rho_1' < 0$ kaikilla $|\theta| > 1$ ja $\rho_1' > 0$ muulloin. Lisäksi $\rho_1 \geq 0$ kaikilla $\theta \geq 0$ ja $\rho_1 < 0$ kaikilla $\theta < 0$. Tästä seuraa, että autokorrelaatiokerroin lähestyy nollaa, kun $|\theta| \to \infty$ ja siten se saa jatkuvana funktiona globaalit ääriarvonsa derivaatan nollakohdissa. Sijoittamalla autokorrelaatiokertoimen kaavaan $\theta = 1$ saadaan maksimiksi $\rho_1 = 1/2$ ja vastaavasti minimiksi $\rho_1 = -1/2$ kohdassa $\theta = -1$.

(ii) Kirjoitetaan autokorrelaatiokerroin muodossa

$$\rho_1 + \rho_1\theta^2 - \theta = 0,$$

mistä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}.$$

Nähdään, että

$$|\theta_1| := \left| \frac{1 + \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} \right| \geq 1$$

kaikilla $\rho_1 \in [-1/2, 1/2]$. Vastaavasti

$$|\theta_2| := \left| \frac{1 - \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} \right| \leq 1$$

kaikilla $\rho_1 \in [-1/2, 1/2]$. Kohdassa a) saadaan siten momenttiestimaattoriksi

$$\tilde{\theta} = \frac{1 - \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

ja kohdassa b) vastaavasti

$$\tilde{\theta} = \frac{1 + \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1},$$

joissa r_1 on ensimmäisen autokorrelaatiokertoimen estimaattori.