Stationaariset aikasarjat sl 2016, HT 8, viikko 47

1. Tarkastellaan monisteen yhtälössä (5.1) esitettyä yleistä ehdollisesti heteroskedastista prosessia $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}(0,1)$, h_t on positiivinen funktio muuttujista y_{t-j}, $j > 0$, ja ε_t on riippumaton muuttujista y_{t-j}, $j > 0$. Oletetaan lisäksi, että y_t on stationaarinen ja $\mathsf{E}\left(y_t^2\right) < \infty$. Osoita monisteen yhtälössä (5.3) mainittu tulos $\mathsf{Cov}(y_t, y_{t-k}) = 0$ kaikilla $k > 0$ eli että y_t on autokorreloimaton.

2. Tarkastellaan ARCH(1)-prosessia $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}(0,1)$, $h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2$, $\omega > 0$, $0 \leq \alpha < 1$. Kuten monisteessa on todettu, pätee tällöin $\mathsf{E}_{t-1}(y_t) = 0$ ja $\mathsf{Var}_{t-1}(y_t) = \mathsf{E}_{t-1}\left(y_t^2\right) = h_t$. Oletetaan nyt, että prosessista y_t havaitaan vain joka toinen arvo ja määritellään edellä mainitut ehdolliset momentit ehdollistaen muuttujien $y_{t-2}, y_{t-4}, ...$ eikä muuttujien $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ suhteen. Osoita, että

(i) $\mathsf{E}(y_t \mid y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = 0$ ja (ii) $\mathsf{Var}(y_t \mid y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = \omega(1+\alpha) + \alpha^2 y_{t-2}^2$.

Vihje: Kohdassa (i) voit käyttää monisteen s. 34 esitetyn iteroidun odotusarvon lain (EO3) yleistystä, jonka mukaan $\mathsf{E}(Y \mid X_2) = \mathsf{E}[\mathsf{E}(Y \mid X_1) \mid X_2]$, kun (mahdollisesti ääretönulotteisen) vektorin X_2 komponentit muodostavat X_1:n komponenttien osajoukon (tai yleisemmin X_2 on X_1:n funktio). Kohdan (ii) voi ratkaista muokkaamalla ensin yhtälöä $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t = \left(\omega + \alpha y_{t-1}^2\right)^{1/2}\varepsilon_t$ niin, että y_t:n riippuvuus y_{t-2}:sta tulee eksplisiittiseksi ja laskemalla tämän jälkeen ehdollinen varianssi.

Huom.: Tulos yleistyy siten, että jos prosessista y_t havaitaan joka m. arvo, niin $\mathsf{Var}(y_t \mid y_{t-m}, y_{t-2m}, ...) = \omega(1-\alpha^m)/(1-\alpha) + \alpha^m y_{t-m}^2$, joten ehdollinen heteroskedastisuus heikkenee, kun havainnointitiheys harvenee. Näin on havaittu käyvän empiirisillä aikasarjoilla.

Seuraavat tehtävät on tarkoitus ratkaista käyttäen kurssisivulta löytyvää R-koodia (R-koodi_2) ja aineistoja Treasury ja Exchange käyttäen.

3. Sarja Treasury on USAn valtion 10 vuoden kiinteäkorkoisten arvopapereiden keskimääräinen kuukausikorko ajanjaksolta 1970I-2014XII. Osaketuottojen ja valuuttakurssien tapaan myös korkosarjoissa tai niistä muodostetuissa tuottosarjoissa voi olla ehdollista heteroskedastisuutta, mutta ne voivat toisaalta olla autokorreloituneita etenkin, kun niitä on havainnoitu kuukausittain (tai harvemmin). Rakenna ARMA(p,q)-malli Treasury-sarjasta muodostetulle tuottosarjalle.

(i) Käyttäen logaritmoitua ja differensoitua sarjaa valitse sopivilta tuntuvat asteet p ja q.

(ii) Estimoi valitsemasi mallin parametrit SU-menetelmällä ja tutki estimoimasi mallin riittävyyttä monisteen jaksossa 4.5 esitettyjä menetelmiä käyttäen kiinnittäen erityisesti huomiota residuaalien mahdolliseen ehdolliseen heteroskedastisuuteen ja virhetermin ei-normaalisuuteen.

4. Sarja Exchange on USAn dollarin ja Englannin punnan välinen kuukausittainen vaihtokurssi ajanjaksolta 1971I-2014XII. Kuten edellisessä tehtävässä vihjattiin, voidaan tästä sarjasta muodostetussa tuottosarjassa epäillä olevan ehdollista heteroskedastisuutta. Rakenna ARMA(p, q)-malli Exchange-sarjasta muodostetulle tuottosarjalle.

(i) Käyttäen logaritmoitua ja differensoitua sarjaa valitse sopivilta tuntuvat asteet p ja q.

(ii) Estimoi valitsemasi mallin parametrit SU-menetelmällä ja tutki estimoimasi mallin riittävyyttä monisteen jaksossa 4.5 esitettyjä menetelmiä käyttäen kiinnittäen erityisesti huomiota residuaalien mahdolliseen ehdolliseen heteroskedastisuuteen ja virhetermin ei-normaalisuuteen.