Stationaariset aikasarjat sl 2016, HT 4, viikko 40

1. Tarkastellaan satunnaiskulkua $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, ...$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$ ja (yksinkertaisuuden vuoksi) $y_0 = 0$ (ks. monisteen s. 16). Vaikka satunnaiskulun autokovarianssifunktiota ja autokorrelaatiofunktiota ei voidakaan määritellä samassa mielessä kuin (heikosti) stationaarisilla prosesseilla, voidaan satunnaismuuttujien y_t ja y_{t+h} väliset kovarianssit ja korrelaatiot määritellä kaikilla $t \geq 1$ ja $h \geq 0$.

(i) Laske $\mathsf{Cov}\,(y_t, y_{t+h})$ ja edelleen $\mathsf{Cor}\,(y_t, y_{t+h}) = \mathsf{Cov}\,(y_t, y_{t+h}) \,/\, \sqrt{\mathsf{Cov}\,(y_t)\,\mathsf{Cov}\,(y_{t+h})}$.

(ii) Selvitä raja-arvo $\lim_{t\to\infty} \mathsf{Cor}\,(y_t, y_{t+h})$, kun $h \geq 0$ on kiinteä.

(iii) Simuloi satunnaiskulusta "kohtuullisen pitkä" realisaatio ja piirrä estimoidun autokorrelaatiofunktion ja osittaisautokorrelaatiofunkion kuvat.

Simuloinnissa voit käyttää seuraavaa R-koodia.

y <- arima.sim(list(order = c(0,1,0)), n = T, sd = 1),

jossa sd = 1 valitsee ε_t:n keskihajonnaksi ykkösen ja n = T simuloitavien havaintojen lukumääräksi T:n.

Yleisemmin voit simuloida realisaatioita ARIMA(p,d,q)-prosessista normaalisin virhein koodilla

y <- arima.sim(list(order = c(p,d,q), ar = c$\left(\phi_1, ..., \phi_p\right)$, ma = c$(\theta_1, ..., \theta_q)$), n = T, sd = σ)

valituilla AR-parametrien $\phi_1, ..., \phi_p$, MA-parametrien $\theta_1, ..., \theta_q$ ja ε_t:n keskihajonnan σ arvoilla. Valinta $d = 0$ vastaa stationaarista ARMA(p, q)-tapausta ja valinta $d \geq 1$ vastaa epästationaarista ARIMA(p, d, q)-tapausta (ks. monisteen jakso 3.5). R:n komennolla ?arima.sim saa lisätietoa simulointikoodista.

Seuraavat tehtävät on tarkoitus ratkaista käyttäen kurssisivulta löytyvää R-koodia (R-koodi_1) ja aineistoja Lake, Drought ja Expect.

2. Tarkastellaan sarjaa Lake eli Huron-järven pinnan keskimääräistä vuotuista korkeutta merenpinnasta (jalkoina) vuosilta 1892-1986. Piirrä Lake-sarja ja estimoi sen autokorrelaatiofunktio ja osittaisautokorrelaatiofunktio valitsemillasi maksimiviipymillä. Viittaavatko autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktio johonkin tiettyyn ARMA-malliin?

3. Liittyen tehtävään 3.4, sademäärä ei välttämättä ole ainoa eikä paras mittari mittaamaan kuivuuden aiheuttamia ongelmia. Yksi vaihtoehto on tiedoston Drought (Palmer Drought Severity Index; PDSI) kuivuusindeksi, josta on vuotuiset havainnot samalta ajanjaksolta (1895-2014) ja samalta Etelä-Kalifornian rannikkoalueelta kuin tehtävän 2.4 sademääräsarjasta.

Piirrä Drought-sarja ja estimoi sen autokorrelaatiofunktio ja osittaisautokorrelaatiofunktio valitsemillasi maksimiviipymillä. Viittaavatko autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktio johonkin tiettyyn ARMA-malliin?

4. Tarkastellaan sarjaa Expect eli Saksalaisten yritysten liiketoiminnan odotuksia kuvaava (kausipuhdistettua) kuukausittaista indeksiä ajanjaksolta 1991I-2015XIII. Piirrä Expect-sarja ja estimoi sen autokorrelaatiofunktio ja osittaisautokorrelaatiofunktio valitsemillasi maksimiviipymillä. Viittaavatko autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktio johonkin tiettyyn ARMA-malliin?