

Stationaariset aikasarjat sl 2016, HT 1, viikko 37

1. Tarkastellaan monisteen Esimerkin 2.1(ii) prosessia

$$y_t = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t),$$

jossa $\lambda \in [0, \pi)$ on vakio ja satunnaismuuttujat A ja B toteuttavat ehdot $E(A) = E(B) = 0$, $\text{Var}(A) = \text{Var}(B) = \sigma^2$ ja $\text{Cov}(A, B) = 0$. Osoita, että $E(y_t) = 0$ ja $\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sigma^2 \cos(\lambda h)$, joten y_t on heikosti stationaarinen.

Vihje: $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

2. Tarkastellaan monisteen Esimerkin 2.2(ii) prosessia $y_t = \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2}$, jossa $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ja $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$. Osoita, että y_t on heikko valkoinen kohina.

3. Tarkastellaan prosessia $y_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$.

(i) Osoita, että y_t on heikko valkoinen kohina.

(ii) Totea, että prosessi y_t^2 on heikosti stationaarinen johtamalla sen odotusarvo ja autokovarianssifunktio.

(iii) Perustele edellisen kohdan avulla, että y_t ei ole vahva valkoinen kohina.

Vihje: Kun $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, niin $E(\varepsilon_t^4) = 3\sigma^4$.

Huom.: Olettaen $E(\varepsilon_t^4) < \infty$ saadaan samalla tavalla formaali perustelu sille, että edellisessä tehtävässä tarkasteltava prosessi ei ole vahva valkoinen kohina.

4. Tarkastellaan MA(1)-prosessin $y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, ensimmäistä autokorrelaatiokerrointa $\rho_1 = \theta / (1 + \theta^2)$ (ks. monisteen s. 11).

(i) Osoita, että ρ_1 toteuttaa epäyhtälöt $-1/2 \leq \rho_1 \leq 1/2$ ja että $\rho_1 = 1/2$ (vastaavasti $\rho_1 = -1/2$), kun $\theta = 1$ (vastaavasti $\theta = -1$).

(ii) Osoita edelleen, että rajoittamalla θ :n arvot joko joukkoon $|\theta| \leq 1$ tai joukkoon $|\theta| \geq 1$ voidaan parametri θ lausua yksikäsitteisesti autokorrelaatiokertoimen ρ_1 funktiona. Esitä tämän perusteella momenttiestimaattori parametrille θ , kun (a) $|\theta| \leq 1$ ja (b) $|\theta| \geq 1$.

Vihje: Ratkaise yhtälö $\rho_1 = \theta / (1 + \theta^2)$ parametrin θ suhteen.

Huom. 1: Momenttiestimaattoria on tarkasteltu tilastollisen päättelyn kurssilla (ks. Nieminen & Saikkonen: ”Tilastollisen päättelyn kurssi”, luku 3.3).

Huom. 2: Tehtävä osoittaa, ettei autokorrelaatiofunktion avulla voida päätellä toteuttaako havainnot tuottaneen MA(1)-prosessin parametri ehdon $|\theta| \leq 1$ vai $|\theta| \geq 1$.