Alkusanat

Kirja on suunniteltu käytettäväksi oppimateriaalina Helsingin ja Turun yliopistojen kursseilla Analyysi I ja II. Se soveltuu materiaaliksi myös muiden yliopistojen ensimmäisen vuoden matemaattisen analyysin kursseille ja sen sisältö vastaa laajuudeltaan noin 20 opintopisteen kokonaisuutta. Kirja perustuu luentoihin, joita allekirjoittaneet pitivät lukuvuosina 2012–2013 ja 2013–2014 Turussa ja Helsingissä. Olemme kiitollisia opiskelijoille ja lukuisille kollegoillemme sisältöä ja ulkoasua koskevista neuvoista ja ehdotuksista.

Lopuksi kiitämme perheitämme tuesta.

Turussa ja Helsingissä 12.6.2014

Petteri Harjulehto, Riku Klén ja Mika Koskenoja

Alkusanat korjattuihin 2. ja 3. painokseen

Toiseen ja kolmanteen painokseen olemme tehneet lukuisia pieniä korjauksia ja muutoksia. Useimmat niistä perustuvat lukijoiltamme saamaamme palautteeseen. Kolmanteen painokseen olemme lisänneet luvun konveksisuudesta ja korkeamman kertaluvun derivaatoista. Kiitämme kaikkia kommenttien lähettäjiä.

Turussa ja Helsingissä 2.6.2015 ja 1.7.2016

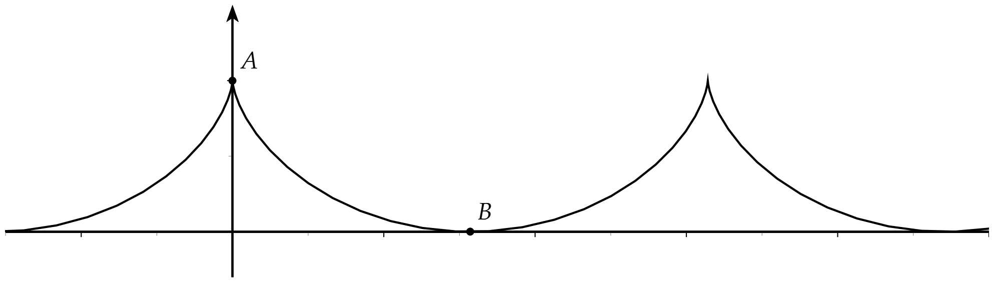
Petteri Harjulehto, Riku Klén ja Mika Koskenoja

Sisältö

Mihin analyysiä tarvitaan?

Tämä kirja käsittelee analyysin perusteita ja tarkemmin reaalianalyysin perusteita reaaliluvuilla. Mutta miksi analyysi on tärkeää ja mihin sitä tarvitaan? Useimmat analyysin sovellukset käyttävät differentiaaliyhtälöitä tai niihin läheisesti liittyvää variaatiolaskentaa. Näiden avulla voidaan mallintaa luonnonilmiöitä, kuten lämmön etenemistä, jäätikön liikkeitä tai eläinpopulaation kokoa, mutta niitä voidaan käyttää myös mm. kuvankäsittelyssä. Tutustutaan analyysin sovelluksiin muutamien esimerkkien avulla.

Ajatellaan, että meillä on eri korkeudella olevat pisteet A ja B, jotka eivät ole päällekäin. Haluamme rakentaa liukumäen, jota pitkin kuula vierii mahdollisimman nopeasti ylemmästä pisteestä A alempaan pisteeseen B, katso Kuva 1. Jana AB tuottaa tietysti lyhimmän liukumäen, mutta sitä pitkin kuula ei vieri lyhimmässä ajassa. Kysymyksen kuulan nopeimmasta vierimisradasta esitti Johann Bernoulli aikalaisilleen 1696. Johann Bernoullin lisäksi kysymyksen ratkaisivat hänen vanhempi veljensä Jakob Bernoulli, Isaac Newton ja Guillaume de l'Hôpital. Vastaus on sykloidin kaari, jolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Jakob Bernoullin syvällinen ratkaisu muodosti alun matemaattisen analyysin uudelle haaralle, variaatiolaskennalle, joka nykyteknologian kannalta on hyvin keskeinen analyysin haara.



Kuva 1. Sykloidin kaarta pitkin kuula vierii nopeimmin pisteestä A pisteeseen B.

Mekaniikan II peruslain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on yhtä suuri kuin kappaleen massa kerrottuna sen kiihtyvyydellä, $F = ma$. Tällöin kappaleen paikka $x(t)$ ajan t funktiona toteuttaa ehdon

$$mx''(t) = F(t),$$

missä x'' on funktion x toinen derivaatta. Yksinkertaisissa tilanteissa, kuten vaikka pudotettaessa esine, paikka voi olla reaaliluku mutta yhtälön voi laajentaa myös niin että paikka on kolmiulotteisen koordinaatiston piste.

Tarkastellaan bakteeripopulaatiota yksinkertaisessa tilanteessa, jossa on tarjolla runsaasti ravintoa eikä bakteereilla ole saalistajia. Kun rajoitetaan tarkastelu lyhyeen ajanjaksoon suhteessa yksittäisen bakteerin elinikään, niin ainoa populaation kokoon vaikuttava tekijä on uusien bakteerien syntyminen. Tällöin on järkevää olettaa, että bakteerikannan kasvun nopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon P ajanhetkellä t eli

$$P'(t) = kP(t), \quad t > 0,$$

missä k on syntyvyyttä kuvaava reaalinen vakio. Tällaista yhtälöä sanotaan tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi, sillä se esittää tuntemattoman yhden muuttujan funktion P ja sen derivaatan välistä yhteyttä. Jos populaation alkukoko P_0 tunnetaan, niin yhtälöön voidaan liittää alkuehto $P(0) = P_0$. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

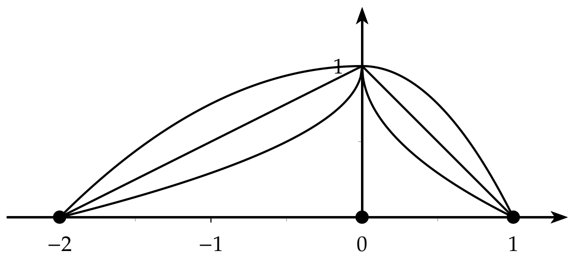
$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad t \geqslant 0.$$

Populaation kasvu (kun $k > 0$) on siis eksponentiaalista ja mallia kutsutaankin eksponentiaaliseksi kasvumalliksi.

Ajatellaan, että olemme suunnitelleet uudenlaisen kondensaattorin ja haluamme tietää sen kapasitanssin. Ajatellaan yksinkertaisuuden takia, että kondensaattorimme on 1-ulotteinen ja se koostuu pisteistä -2, 0 ja 1, katso Kuva 2. Saamme kapasitanssin selville tutkimalla funktioita u, joille $u(0) = 1$, $u(-2) = 0 = u(1)$ ja jotka ovat derivoituvia väleillä $(-2, 0)$ ja $(0, 1)$. Kapasitanssi on lausekkeen

$$\int_{-2}^{0} |u'(x)|^2 \, dx + \int_{0}^{1} |u'(x)|^2 \, dx$$

pienin arvo, kun u on yllä määritelty derivoituva funktio. Vaikka 1-ulotteisia kondensaattoreita ei voi olla olemassa, niin yllä kuvatun minimointiongelman muuttaminen 3-ulotteiseksi johtaa todellisen tilanteen mallintamiseen ja oikean kondensaattorin kapasitanssin ratkaisemiseen.



Kuva 2. Kondensaattorin kapasitanssin laskeminen: pisteet -2, 0 ja 1 sekä ehdokasfunktioita.

Analyysia sovelletaan myös lääketieteelliseen kuvantamiseen kuten röntgen, tietokonetomografia tai PET. Kuvauksen aikana suoritetaan useita mittauksia, joiden perusteella muodostetaan kuva. Kuvan muodostaminen eli rekonstruktio tapahtuu teoriassa laskemalla integraalien arvoja mitatuista arvoista. Integraalit lasketaan niin kutsuttujen projisiosuorien suuntaisesti. Käytännössä integraalien laskemisen lisäksi laskennassa tehdään useita korjauksia liittyen fysikaalisiin ilmiöihin.

Elektroreologiset nesteet ovat ryhmä nesteitä, joiden viskositeetti eli virtausvastus riippuu siitä, onko neste sähkökentässä vai ei. Nämä nesteet ovat esimerkki älykkäistä materiaaleista, joiden tutkimus on tällä hetkellä aktiivista niin matematiikassa kuin insinööritieteissäkin. Näiden(kin) nesteiden virtausta voidaan mallintaa sopivilla osittaisdifferentiaaliyhtälöillä. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja niiden ratkaisujen ymmärtämiseksi tarvitaan ainakin jatkuvuuden, derivaatan ja integraalin käsitteitä. Kaikkia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ei osata ratkaista, joten niiden ratkaisu joudutaan selvittämään numeerisesti. Tässä kirjassa esiteltävät Taylorin polynomit ovat keskeinen lähtökohta numeerisissa menetelmissä.

Lukiosta yliopistoon

Lukion matematiikassa opitaan differentiaalilaskentaa. Tulokset annetaan valmiina laskusääntöinä ilman täsmällistä perustelua. Tässä kirjassa käydään perusteellisesti läpi näiden tulosten teoria. Seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan ylioppilaskokeen matematiikan tehtäviä ja niiden ratkaisuihin liittyvää teoriaa.

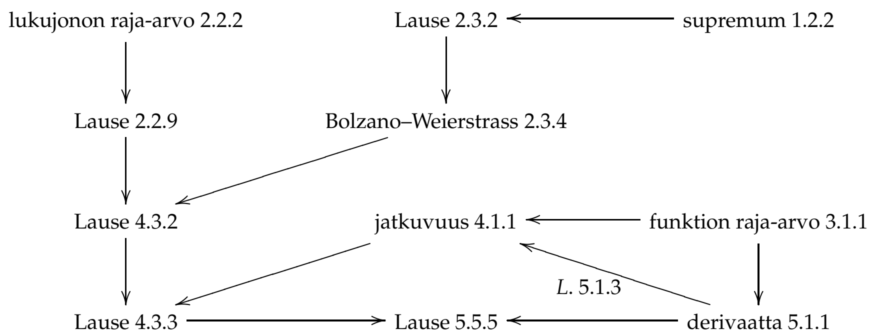
Esimerkki 1 (Yo pitkä matematiikka, syksy 2012, tehtävä 5): Määritä polynomin $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2, 6]$.

Ratkaisu. Polynomin $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$. Derivaatan nollakohdat saamme toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta. Ne ovat

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4315}}{6} = \frac{12 \pm 18}{6} = \begin{cases} 5, \\ -1. \end{cases}$$

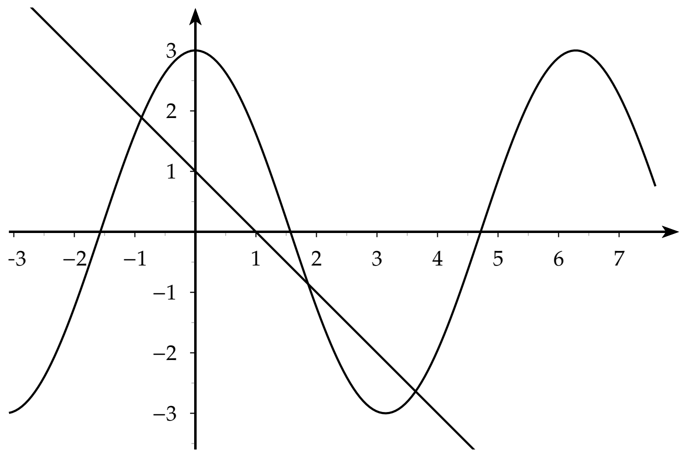
Näistä vain 5 kuuluu tutkittavalle välille $[2, 6]$. Koska $f(2) = -44$, $f(5) = -98$ ja $f(6) = -88$, antaa $f(2)$ suurimman ja $f(5)$ pienimmän arvon. Suurin arvo on siis -44 ja pienin -98. △

Edellä esitetty ratkaisu perustuu lukiossa opittuun sääntöön, jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Tässä kirjassa tämä sääntö on Lause 5.5.5. *Miten Lause 5.5.5 todistetaan?* Meidän on ainakin osattava derivoida ja ymmärrettävä jatkuvuus, mutta tämä ei riitä. Lisäksi tarvitsemme lukujonon ja funktion raja-arvot ja Bolzanon–Weierstrassin lauseen. Kuvasta 3 selviää näiden määritelmien ja tulosten suhde käytettyyn lauseeseen.



Kuva 3. Suljetulla välillä derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo (Lause 5.5.5).

Esimerkki 2 (Yo pitkä matematiikka, kevät 2012, tehtävä 13): Funktioiden $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3\cos x$ kuvaajilla on kolme leikkauspistettä. Laske koordinaateille kaksidesimaaliset likiarvot valitsemallasi numeerisella menetelmällä.



Kuva 4. Funktiot $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3\cos x$.

Ratkaisu. Funktioiden f ja g kuvaajat ovat Kuvassa 4. Määritellään funktio $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $h(x) = f(x) - g(x) = 1 - x - 3\cos x$. Tällöin funktio h on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Koska $h(-0{,}885) < -0{,}014$, $h(-0{,}89) > 0{,}0017$ ja h on jatkuva, on funktiolla h nollakohta välillä $(-0{,}885; -0{,}89)$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on siis $-0{,}89$.

Koska $h(1{,}86) < -0{,}0044$, $h(1{,}865) > 0{,}0049$ ja h on jatkuva, on funktiolla h toinen nollakohta välillä $(1{,}86; 1{,}865)$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $1{,}86$.

Koska $h(3{,}635) > 0{,}0071$, $h(3{,}64) < -0{,}0049$ ja h on jatkuva, on funktiolla h kolmas nollakohta välillä $(3{,}635; 3{,}64)$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $3{,}64$.

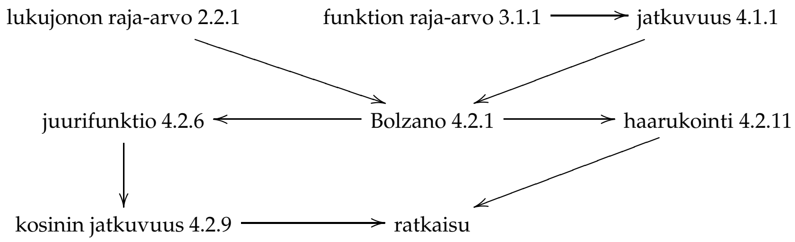
Leikkauspisteiden y-koordinaatit ovat $f(-0{,}89) = 1{,}89$, $f(1{,}86) = -0{,}86$ ja $f(3{,}64) = -2{,}64$. Leikkauspisteet ovat siis $(-0{,}89; 1{,}89)$, $(1{,}86; -0{,}86)$ ja $(3{,}64; -2{,}64)$.

$\triangle$

Tässä esimerkissä numeeriseksi menetelmäksi on valittu haarukointi eli Bolzanon lauseen soveltaminen. *Mistä tiedämme, että haarukointi toimii kaikilla jatkuville funktioille? Mistä tiedämme, että tehtävän funktiot ovat jatkuvia?* Tai tarkemmin, mistä tiedämme, että kosini on jatkuva. Voidaksemme todistaa, että haarukointi toimii, tarvitsemme lukujonon raja-arvon, funktion raja-arvon, funktion jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen. Kosinin jatkuvuuteen tarvitaan samat käsitteet. Ne ovat Kuvassa 5.

Esimerkki 3 (Yo pitkä matematiikka, kevät 2010, tehtävä 2a): Laske integraali

$$\int_0^1 e^x + 1\,dx.$$

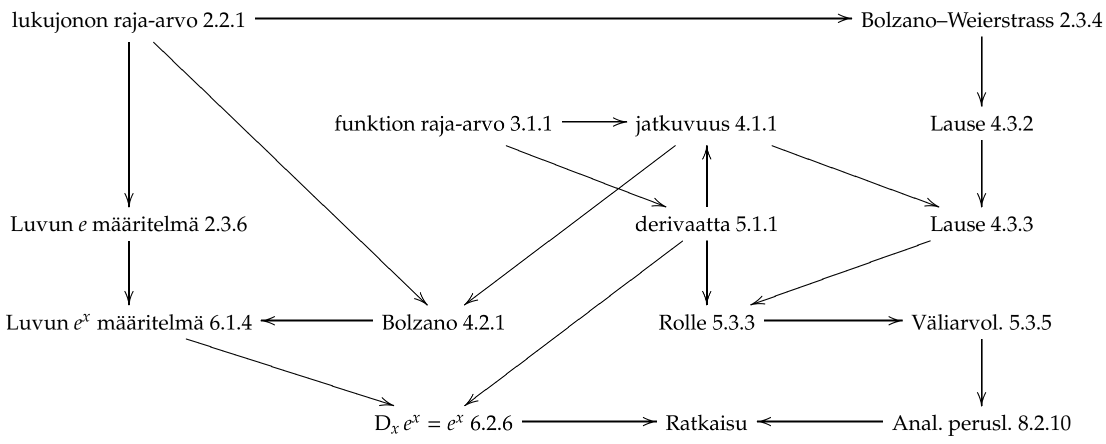


KUVA 5. Bolzanon lause ja haarukointi.

RATKAISU.

$$\int_0^1 e^x + 1\,dx = e^1 + 1 - (e^0 + 0) = e. \qquad \triangle$$

Näennäisestä helppoudesta huolimatta tämä tehtävän takana on erittäin syvällisiä tuloksia. *Miten Neperin luku e määritellään? Kuinka määritellään Neperin luku korotettuna irrationaalilukupotenssiin? Millaiset funktiot ovat integroituvia? Miten integraalin arvo saadaan selville?* Integraalien laskemiseen tarvitaan merkittävä osa tämän kirjan sisältämästä teoriasta. Käsitteet löytyvät Kuvasta 6.



KUVA 6. Miten saadaan $\int_0^1 e^x\,dx = e^1 - e^0$?

Mihin tarvitaan tarkkoja määritelmiä?

Mihin tarvitaan tarkkoja määritelmiä? Erityisesti mihin tarvitaan raja-arvon (ε, δ)-määritelmää? Mitä vikaa lukiossa esitetyssä määritelmässä on? Lukiossa raja-arvo ja sitä kautta funktion jatkuvuus määritellään usein graafisen tulkinnan kautta. Monissa helpoissa tilanteissa tämä on riittävää. Kaikkia ilmiöitä ei kuitenkaan saada esille ilman täsmällisiä määritelmiä. Ajatellaan esimerkiksi funktiota

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x > 0, \\ c, & \text{kun } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Kun $c = 0$, niin funktio on jatkuva. Jos sen sijaan luku c on hyvin lähellä nolla, vaikka $c = 10^{-10}$, niin kuvaajasta on vaikea tehdä johtopäätöstä jatkuvuudesta. Ongelma ei välttämättä ratkea katsomalla kuvaa oikeassa mittakaavassa. Esimerkiksi kuvasta on vaikea sanoa, onko funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ ja $f(x) = \sin(1/x)$, kun $x \neq 0$, raja-arvoa origossa, tai kuvaajasta on vaikea huomata, että funktio $f\colon (10, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$, on (aidosti) kasvava ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Jatkuvuuden määrittely graafisen tulkinnan kautta saattaa aiheuttaa väärinkäsityksiä, jos funktio ei ole määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on määritelty kaikilla muilla reaaliluvuilla paitsi silloin, kun $x = 0$. Funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan, vaikka lukion jatkuvuuden perusteella voisi ajatella sen epäjatkuvaksi.

Tässä kirjassa esitetyistä määritelmistä ainakin tasainen jatkuvuus (Määritelmä 4.4.1) ja tasainen suppeneminen (Määritelmä 11.1.2) edellyttävät täsmällistä (ε, δ)-määritelmää. Tasaisesta jatkuvuudesta seuraa esimerkiksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva (Lause 7.2.3). Tasaisesta suppenemisesta seuraa esimerkiksi, että jatkuvista funktioista koostuvan funktiojonon rajafunktio on jatkuva (Lause 11.1.6) tai että potenssisarja voidaan integroida ja derivoida termeittäin (Korollaarit 15.3.11 ja 15.3.14).

Kirjan rakenne

Olemme suunnitelleet tämä kirjan yliopistoon matematiikan ensimmäisen vuoden pääaineopiskelijoiden analyysin kursseille, joiden nimet Helsingin ja Turun ylipistoissa ovat Analyysi I ja Analyysi II. Kirjan osat 1 ja 2 kattavat syksyn kurssin ja osat 3, 4 ja 5 kevään kurssin. Kirjoittajien mielestä keskeisimmät lauseet on ladottu reunallisen tummennetun laatikon sisään. Tähdellä merkityt luvut laajentavat aihepiirin tietämystä ja ne voidaan jättää väliin kokonaisuuden siitä kärsimättä. Lisäksi liitteisiin on koottu sekä valmistelevaa materiaalia että teoriaa laajentavaa materiaalia. Kirjassa olevat historialliset tiedot on koottu eri lähteistä, kuitenkin etupäässä lähteistä **[6, 16]**, eikä niitä ole tarkistettu. Näiden historiallisten tietojen osalta tätä kirjaa ei saa käyttää lähteenä.

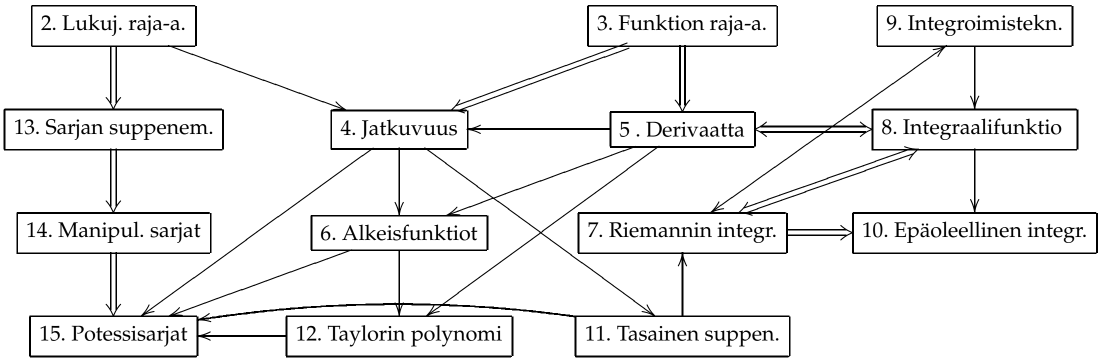
Kirja alkaa Luvulla 1, jossa esitellään reaalilukujen aksioomat sekä funktion määritelmä. Osa 1 käsittelee raja-arvoa. Luvussa 2 käsitellään lukujonon raja-arvoa ja Luvussa 3 funktion raja-arvoa. Meidän mielestämme lukujonon raja-arvo kannattaa käsitellä ennen funktion raja-arvoa, koska näin opiskelijat pääsevät harjoittelemaan haastavaa (ε, δ)-määritelmää ensin helpommassa lukujonon tapauksessa.

Osa 2 alkaa funktion jatkuvuudella (Luku 4) ja siirtyy sitten derivoituvuuteen (Luku 5). Nämä luvut muodostavat tiiviin ja tärkeän kokonaisuuden. Luvussa 6 kerrotaan, miten potenssin eksponentiksi voidaan laittaa rationaalilukujen lisäksi myös irrationaalilukuja.

Osa 3 käsittelee Riemannin integroituvuutta. Luvussa 7 määritellään Riemannin integraali rajoitetuille funktioille ala- ja yläsummien avulla. Luvussa 8 tutkitaan Riemannin integraalin ja derivaatan välisiä yhteyksiä tutustumalla integraalifunktioon. Luvussa 9 tutustutaan erilaisiin integraalin laskemisen tekniikoihin. Luvussa 10 Riemannin integraalin määritelmä laajennetaan rajaoittamattomille väleille ja rajoittamattaomille funktioille.

Osassa 4 käsitellään funktiojonoja ja hankalien funktioiden arviointia helpompien funktioiden avulla. Luvussa 11 esitellään tasaisen suppenemisen käsite. Tasainen suppeneminen on hyödyllinen, koska siinä jatkuvuus ja integroituvuus periytyvät rajafunktiolle. Luvussa 12 tutustutaan funktion arviointiin Taylorin ja Maclaurinin polynomeilla, jotka ovat sovelletun matematiikan perustyökaluja.

Viimeisessä osassa 5 käsitellään sarjoja. Luvussa 13 tutkitaan sarjojen suppenemista. Luvussa 14 tutustutaan vuorotteleviin sarjoihin sekä sarjan termien ryhmittelyyn ja uudelleenjärjestämiseen. Viimeisessä luvussa 15 käsitellään potenssisarjoja ja laajennetaan Taylorin polynomit sarjoiksi.



Kirjan lukujen väliset merkittävimmät riippuvuudet. Yksinkertainen nuoli kuvaa riippuvuutta ja kaksinkertainen vahvaa riippuvuutta.

LUKU 1

Reaaliluvut ja funktion määritelmä

Tässä luvussa käsittelemme reaalilukujen ja funktioiden perusominaisuuksia. Luvun asiat eivät muodosta kokonaisuutta vaan antavat tarpeellisen teoreettisen pohjan Osien 1–4 asioihin. Luvussa 1.1 määrittelemme reaaliluvut aksiomaattisesti. Erityisen keskeistä täydellisyysaksiomaa käsitellään Luvussa 1.2. Luvussa 1.3 esittelemme induktion, jota Luvussa 1.4 sovellamme potenssiepäyhtälöihin. Luvussa 1.5 määrittelemme funktion ja tutkimme sen ominaisuuksia. Viimeisessä luvussa, Luvussa 1.6, annamme trigonometrisille funktioille geometrisen määritelmän.

1.1. Reaalilukujen kunta- ja järjestysaksioomat

Analyysi perustuu reaalilukujen teoriaan. Ennen varsinaiseen analyysiin siirtymistä esitämme reaalilukujen aksioomat, joista kaikki reaalilukujen ominaisuudet voidaan johtaa. Tässä luvussa esitetyt reaalilukujen ominaisuudet ovat lukiosta tuttuja, joten halutessaan tämän luvun voi jättää väliin ja palata siihen algebran opintojen yhteydessä.

Merkitsemme reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$, joka tarkoittaa siis kaikkia reaalilukuja. Tässä kirjassa emme esittele joukon yleistä määritelmää, vaan ajattelemme joukon koostuvan kokoelmasta alkioita. Yleiseen joukkoon liittyviä merkintöjä on esitelty liitteessä A.

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on algebrallisilta ominaisuuksiltaan *kunta*, jossa on määritelty kaksi laskutoimitusta, *yhteenlasku* $+$ ja *kertolasku* $\cdot$. Kahden reaaliluvun $x, y \in \mathbb{R}$ *summa* on $x + y \in \mathbb{R}$ ja *tulo* on $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Tulossa kertomerkki jätetään yleensä kirjoittamatta ja merkitään xy.

Kunta-aksioomat:

(K1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ (yhteenlaskun vaihdannaisuus).
(K2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ (yhteenlaskun liitännäisyys).
(K3) On olemassa sellainen reaaliluku 0, että $x + 0 = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (nolla-alkio).
(K4) Jokaista reaalilukua $x \in \mathbb{R}$ vastaa reaaliluku $y \in \mathbb{R}$ siten, että $x + y = 0$. Tällöin merkitään $y = -x$ (vastaluku).
(K5) $xy = yx$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ (kertolaskun vaihdannaisuus).
(K6) $(xy)z = x(yz)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ (kertolaskun liitännäisyys).
(K7) $x(y + z) = xy + xz$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ (osittelulaki).
(K8) On olemassa sellainen reaaliluku 1, että $1 \cdot x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (ykkösalkio).
(K9) Jokaista reaalilukua $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, vastaa reaaliluku $y \in \mathbb{R}$ siten, että $xy = 1$. Tällöin merkitään $y = \frac{1}{x}$ tai $y = x^{-1}$ (käänteisluku).

Tässä kirjassa ymmärrämme luonnolliset luvut $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ ja rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ reaalilukujen osajoukkoina. Luonnolliset luvut määrittelemme ykkösalkion avulla: $1 \in \mathbb{N}_1$ ja jos $n \in \mathbb{N}_1$, niin $n+1 \in \mathbb{N}_1$. Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ saamme luonnollisista luvuista lisäämällä joukkoon $\mathbb{N}_1$ nolla-alkion 0 ja jokaisen luonnollisen luvun vastaluvun eli joukon $\{-x : x \in \mathbb{N}_1\}$. Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ saamme kokonaisluvuista asettamalla

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \right\}.$$

Lisäksi joukolle $\{0\} \cup \mathbb{N}_1$ käytämme merkintää $\mathbb{N}_0$ ja joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alkioita kutsumme irrationaaliluvuiksi.

Kunta-aksioomista seuraa useita tärkeitä reaalilukujen ominaisuuksia. Ensimmäiset niistä koskevat nolla- ja ykkösalkion sekä vasta- ja käänteisluvun yksikäsitteisyyttä.

Lause 1.1.1: *Reaalilukujen joukossa on yksi nolla-alkio* 0 *ja yksi ykkösalkio* 1.

Todistus. Olkoon $0' \in \mathbb{R}$ luku, jolla $x + 0' = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = 0$ saamme $0 + 0' = 0$. Jos taas aksioomassa (K3) valitaan $x = 0'$, niin saamme $0' + 0 = 0'$. Koska reaalilukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden eli aksiooman (K1) mukaan $0 + 0' = 0' + 0$, niin $0' = 0$. Näin ollen reaalilukujen joukossa on vain yksi nolla-alkio 0. Huomaa, että aksiooma (K3) takaa nolla-alkion 0 olemassaolon.

Vastaavasti voidaan osoittaa ykkösalkion 1 yksikäsitteisyys (Tehtävä 1.1.5). □

Seuraavan tuloksen mukaan reaalilukujen summa ja tulo (silloin kun kumpikaan tulon tekijä ei ole 0) ovat yksikäsitteisiä.

Lause 1.1.2: *Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Jos $x + y = x + z$, niin $y = z$. Vastaavasti, jos $x \neq 0$ ja $xy = xz$, niin $y = z$.*

Todistus. Olkoon $x + y = x + z$. Tällöin aksioomien (K1), (K2), (K3) ja (K4) mukaan

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) \\ &= (x + z) + (-x) = (z + x) + (-x) = z + (x + (-x)) = z + 0 = z. \end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan osoittaa tulon yksikäsitteisyys (Tehtävä 1.1.6). □

Lause 1.1.3: *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Yhtälöllä $a + x = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in \mathbb{R}$, jota merkitään $b - a$ ja kutsutaan lukujen b ja a* erotukseksi. *Vastaavasti, jos $a \neq 0$, niin yhtälöllä $ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in \mathbb{R}$, jota merkitään $\frac{b}{a}$ tai b/a ja kutsutaan lukujen b ja a* osamääräksi.

Todistus. Huomataan, että $x = (-a) + b \in \mathbb{R}$ on yhtälön ratkaisu, sillä aksioomia (K1), (K2), (K3) ja (K4) käyttäen saadaan

$$a + x = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b.$$

Jos $y \in \mathbb{R}$ on yhtälön $a + x = b$ toinen ratkaisu, niin $a + x = b = a + y$, joten Lauseen 1.1.2 mukaan $x = y$.

Vastaavasti voidaan osoittaa yhtälön $ax = b$ ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys (Tehtävä 1.1.7). □

Muita tuttuja reaalilukujen algebrallisia ominaisuuksia on tehtävissä 1.1.8–1.1.12.

Kunnan struktuuriin liittyvien algebrallisten ominaisuuksien lisäksi reaaliluvuilta vaaditaan, että ne voidaan asettaa järjestykseen, jolloin reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ muodostaa *järjestetyn* kunnan. Järjestysominaisuus on myös luonnollisilla luvuilla, kokonaisluvuilla, rationaaliluvuilla ja irrationaaliluvuilla, jotka ovat reaalilukujen joukon osajoukkoja, mutta esimerkiksi kompleksilukuja ei voida asettaa järjestykseen.

Järjestysaksioomat: Reaalilukujen *järjestysrelaatiolla* $<$ on seuraavat ominaisuudet:

(J1) Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin ehdoista $x < y$, $x = y$ ja $x > y$ on voimassa täsmälleen yksi. (Merkintä $x > y$ tarkoittaa samaa kuin $y < x$.)
(J2) Jos $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$ (transitiivisuus).
(J3) Jos $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ ja $y > 0$, niin $xy > 0$.
(J4) Jos $x, y, z \in \mathbb{R}$ ja $x < y$, niin $x + z < y + z$.

Reaalilukujen järjestyksen ja suuruusvertailun yhteydessä käytetään yleisesti seuraavia merkintöjä:

(m1) $x \leqslant y$, jos $x < y$ tai $x = y$.
(m2) $x \neq y$, jos $x < y$ tai $x > y$.
(m3) $x \geqslant y$, jos $x > y$ tai $x = y$.

Samoin seuraavia ilmaisuja käytetään yleisesti:

(i1) Jos $x > 0$, niin sanotaan, että x on *positiivinen*.
(i2) Jos $x < 0$, niin sanotaan, että x on *negatiivinen*.
(i3) Jos $x \geqslant 0$, niin sanotaan, että x on *ei-negatiivinen*.
(i4) Jos $x \leqslant 0$, niin sanotaan, että x on *ei-positiivinen*.

Reaalilukuvälejä merkitsemme seuraavasti, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$: (a, b) on avoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $[a, b]$ on suljettu väli $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, $(a, b]$ on puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ ja $[a, b)$ on puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$.

LAUSE 1.1.4: *Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin $x = y$, jos ja vain jos $x \leqslant y$ ja $x \geqslant y$.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $x = y$. Tällöin merkintöjen (m1) ja (m3) perusteella $x \leqslant y$ ja $x \geqslant y$.

Oletetaan sitten, että $x \leqslant y$ ja $x \geqslant y$. Tehdään vastaoletus, että $x \neq y$. Koska $x \leqslant y$ ja $x \geqslant y$, niin merkintöjen (m1) ja (m3) mukaan $x < y$ ja $x > y$ ovat nyt voimassa samanaikaisesti. Tämä on ristiriita aksiooman (J1) kanssa. Siis $x = y$. □

Joitakin muita tuttuja reaalilukujen järjestyksen ominaisuuksia on tehtävissä 1.1.13–1.1.16.

Reaalilukujen joukon yksikäsitteiseen karakterisointiin eivät vielä riitä kunta- ja järjestysaksioomat, sillä esimerkiksi rationaalilukujen joukko toteuttaa ne kaikki. Sen vuoksi reaalilukujen aksioomajärjestelmää on täydennettävä seuraavassa luvussa esitettävällä täydellisyysaksioomalla.

Tehtäviä lukuun 1.1.

1.1.5: Osoita, että reaalilukujen joukossa on vain yksi ykkösalkio 1.

1.1.6: Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$. Osoita, että jos $xy = xz$, niin $y = z$.

1.1.7: Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Osoita, että yhtälöllä $ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in \mathbb{R}$.

1.1.8: Osoita, että $0 \cdot x = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

1.1.9: Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $xy = 0$, niin ainakin toinen luvuista x ja y on 0.

1.1.10: Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Osoita, että

(a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$,
(b) $x(y - z) = xy - xz$,
(c) $(-x)(-y) = xy$.

1.1.11: Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $b, d \neq 0$. Osoita, että

(a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, jos ja vain jos $ad = bc$,
(b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,
(c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

1.1.12: Osoita, että jos $a \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$, niin $(-1) \cdot a = -a$ ja $\dfrac{1}{-a} = -\dfrac{1}{a}$.

1.1.13: Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sekä $a < b$ ja $c < d$. Osoita, että $a + c < b + d$. Jos lisäksi a, b, c, d ovat positiivisia, niin osoita, että $ac < bd$ ja $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$.

1.1.14: Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $zx < zy$.

1.1.15: Osoita, että jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x > 0$, niin $-x < 0$ ja $x^{-1} = \dfrac{1}{x} > 0$.

1.1.16: Osoita, että $0 < 1$.

1.1.17: Olkoot $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. Infimum, supremum ja täydellisyysaksiooma

Tässä luvussa käsittelemme reaalilukujoukkojen ylä- ja alarajoja. Erityisesti olemme kiinnostuneita pienimmästä ylärajasta supremumista ja suurimmasta alarajasta infimumista. Nämä käsitteet ovat keskeisiä tässä kirjassa esiteltävässä asiassa.

MÄÄRITELMÄ 1.2.1: Olkoon E reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko. Jos on olemassa sellainen $s \in \mathbb{R}$, että $x \leqslant s$ kaikilla $x \in E$, niin lukua s sanotaan joukon E *ylärajaksi* ja joukkoa E sanotaan *ylhäältä rajoitetuksi*. Vastaavasti, jos on olemassa sellainen $p \in \mathbb{R}$, että $x \geqslant p$ kaikilla $x \in E$, niin lukua p sanotaan joukon E *alarajaksi* ja joukkoa E sanotaan *alhaalta rajoitetuksi*.

Huomaa, että joukon yläraja ja alaraja eivät ole yksikäsitteisiä. Jos s on joukon E yläraja, niin tällöin myös $s+1, s+2, s+3, \ldots$ ovat joukon E ylärajoja. Esimerkiksi 0 ja 1 ovat joukon $(1, 2]$ alarajoja sekä 2 ja 3 ovat sen ylärajoja.

Määritelmä 1.2.2: Jos E on reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä ylhäältä rajoitettu osajoukko ja jos s on joukon E yläraja, joka toteuttaa epäyhtälön $s \leqslant x$ kaikilla joukon E ylärajoilla x, niin s on joukon E *supremum* eli pienin yläraja. Tällöin merkitään $s = \sup E$. Jos joukko E ei ole ylhäältä rajoitettu, niin merkitään $\sup E = \infty$.

Vastaavalla tavalla määritellään infimum eli suurin alaraja.

Määritelmä 1.2.3: Jos E on reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä alhaalta rajoitettu osajoukko ja jos p on joukon E alaraja, joka toteuttaa epäyhtälön $p \geqslant x$ kaikilla joukon E alarajoilla x, niin p on joukon E *infimum* eli suurin alaraja. Tällöin merkitään $p = \inf E$. Jos joukko E ei ole alhaalta rajoitettu, niin merkitään $\inf E = -\infty$.

Luku $s \in E$ on joukon E suurin luku, jos $x \leqslant s$ kaikilla $x \in E$ ja silloin merkitsemme $s = \max E$. Vastaavasti luku $p \in E$ on joukon E pienin luku, jos $x \geqslant p$ kaikilla $p \in E$ ja silloin merkitsemme $p = \min E$. Seuraavaksi todistamme, että jos joukossa on suurin luku, niin se on joukon supremum, ja jos joukossa on pienin luku, niin se on joukon infimum. Huomaa kuitenkin, että joukossa ei välttämättä ole suurinta tai pienintä lukua, kuten esimerkiksi joukossa $(0, 1)$.

Lause 1.2.4:
(a) *Olkoon E reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä ylhäältä rajoitettu osajoukko. Jos joukossa E on suurin luku s, niin $s = \sup E$.*
(b) *Olkoon E reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä alhaalta rajoitettu osajoukko. Jos joukossa E on pienin luku p, niin $p = \inf E$.*

Todistus. (a) Suurin luku s on joukon E yläraja, koska kaikilla $x \in E$ pätee $x \leqslant s$. Koska s on yläraja, niin $\sup E \leqslant s$. Koska $s \in E$, niin supremumin määritelmän nojalla $s \leqslant \sup E$. Näin ollen $s = \sup E$.

(b) Todistus on samankaltainen kuin kohdan (a) todistus. □

Seuraavaksi esitämme reaalilukujen viimeisen aksiooman eli täydellisyysaksiooman, joka erottaa reaaliluvut oleellisesti rationaaliluvuista.

Täydellisyysaksiooma: Ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on aina supremum, joka on reaaliluku.

Täydellisyysaksioomasta seuraa, että alhaalta rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on aina infimum.

Lause 1.2.5: *Olkoon E alhaalta rajoitettu epätyhjä reaalilukujen osajoukko. Tällöin joukon E infimum on reaaliluku.*

Todistus. Olkoon c joukon E eräs alaraja. Merkitään

$$F = \{-x \colon x \in E\}.$$

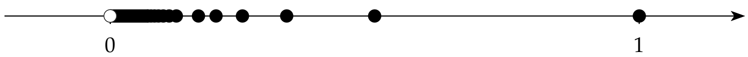
Tällöin joukko F on ylhäältä rajoitettu, koska $x \geqslant c$ kaikilla $x \in E$ antaa $-x \leqslant -c$ kaikilla $x \in E$. Täydellisyysaksiooman nojalla joukolla F on supremum $s \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $x \in E$ pätee $-x \leqslant s \leqslant -c$, josta saamme $x \geqslant -s \geqslant c$ kaikilla $x \in E$. Luku $-s$ on siis joukon E suurin alaraja eli infimum. □

Huomaa, että rationaaliluvuilla ei ole täydellisyys ominaisuutta. Esimerkiksi rationaalilukujoukko $\{2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots\} = \{(1+\frac{1}{1})^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \ldots\}$ on ylhäältä rajoitettu (esimerkiksi 3 on sen yläraja) mutta joukon supremum ei ole rationaaliluku. Lukujoukon yleinen termi on $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ja sen raja-arvona on Neperin luku $e \approx 2{,}718$ (2.3.6), joka on irrationaalinen (C.2). Esimerkissä 1.2.9 osoitetaan että neliöjuuri kaksi on irrationaalinen. Geometrisesti täydellisyysaksiooman voi tulkita niin, että reaaliakselilla ei ole reikiä.

Esimerkki 1.2.6: Olkoon $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Määritä joukon E supremum ja infimum.

Ratkaisu. Luku 1 on joukon E suurin alkio, joten se on myös sen supremum (Lause 1.2.4).

Koska kaikilla $x \in E$ pätee $x > 0$, niin luku 0 on joukon E alaraja. Toisaalta, jos $z > 0$, niin on olemassa luku $x \in E$, jolle $0 < x < z$. Näin ollen luku z ei voi joukon E alaraja. Luku 0 on siis joukon suurin alaraja eli infimum. △



Kuva 1.1. Esimerkin 1.2.6 joukko $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$.

Lause 1.2.7:
(a) *Reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjän ylhäältä rajoitetun osajoukon E supremum on yksikäsitteinen.*
(b) *Reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjän alhaalta rajoitetun osajoukon E infimum on yksikäsitteinen.*

Todistus. (a) Olkoot s ja s' joukon E supremumeja. Koska s' on eräs joukon yläraja, niin $s = \sup E \leqslant s'$. Vastaavalla tavalla saadaan $s' = \sup E \leqslant s$. Näistä yhdessä saamme $s = s'$.

(b) Todistus on samankaltainen kuin kohdan (a) todistus. □

Seuraavassa lauseessa todistamme, että joukosta löytyy aina lukuja jotka ovat mielivaltaisen lähellä joukon supremumia.

Lause 1.2.8:
(a) *Olkoon E reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä ylhäältä rajoitettu osajoukko. Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle*

$$\sup E - \varepsilon < x \leqslant \sup E.$$

(b) *Olkoon E reaalilukujen $\mathbb{R}$ epätyhjä alhaalta rajoitettu osajoukko. Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle*

$$\inf E \leqslant x < \inf E + \varepsilon.$$

Huomaa, että Tehtävässä 1.2.16 todistetaan yllä oleva lause toiseen suuntaan.

Todistus. Todistetaan kohta (a). Väitteen oikeanpuoleinen epäyhtälö seuraa supremumin määritelmästä. Tarkastellaan seuraavaksi vasemmanpuoleista epäyhtälöä. Tehdään vastaoletus: on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle $x \leqslant \sup E - \varepsilon$ kaikilla $x \in E$. Tällöin luku $\sup E - \varepsilon$ on joukon E yläraja, joka on pienempi kuin joukon E supremum. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus ei voi päteä ja $\sup E - \varepsilon < x$ jollekin $x \in E$.

Kohdan (b) todistus on hyvin samankaltainen ja se jätetään Tehtäväksi 1.2.15.

□

Lopuksi osoitamme, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Luvulla $\sqrt{2}$ tarkoitamme reaalilukua x, jolle $xx = 2$.

Esimerkki 1.2.9: On olemassa positiivinen reaaliluku x, jolle $xx = 2$ ja $x \notin \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Tutkitaan joukkoa $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \text{ ja } xx \leqslant 2\}$. Joukko A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, koska (esimerkiksi) $0 \in A$ ja 2 on joukon A eräs yläraja. Täydellisyysaksiooman nojalla joukon A supremum on reaaliluku, merkitään $a = \sup A$. Seuraavaksi osoitamme, että $aa = 2$. Teemme tämän osoittamalla, että epäyhtälöt $aa < 2$ ja $aa > 2$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan ensin, että $aa < 2$. Merkitään $b = 2/a$. Jakamalla epäyhtälö $aa < 2$ luvulla a saamme $a < b$. Olkoon $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Tällöin $a < c < b$. Epäyhtälöstä $(x-y)(x-y) \geqslant 0$ saamme suoraan laskettua, että $(x+y)(x+y) \geqslant 4xy$. Soveltamalla tätä luvuille $x = a$ ja $y = b$ saamme $cc \geqslant ab = 2$. Tästä seuraa, että

$$\frac{2}{c} \cdot \frac{2}{c} = \frac{4}{cc} \leqslant \frac{4}{2} = 2.$$

Saamme, että $\frac{2}{c} \in A$ mutta tällöin

$$\frac{2}{c} > \frac{2}{b} = a.$$

Tämä on ristiriitan luvun a määritelmän kanssa, joten epäyhtälö $aa < 2$ ei voi päteä.

Oletetaan sitten, että $aa > 2$. Merkitään $b = 2/a$ ja $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Jakamalla epäyhtälö $aa > 2$ luvulla a saamme $a > b$, joten $b < c < a$. Soveltamalla epäyhtälöä $(x+y)(x+y) \geqslant 4xy$ luvuille $x = a$ ja $y = b$ saamme $cc \geqslant ab = 2$. Joten kaikilla $x \in A$ pätee, $xx < 2 < cc$. Tästä seuraa, että c on joukon A yläraja mutta koska $c < a$ niin tästä seuraa ristiriita luvun a määritelmän kanssa. Saamme, että epäyhtälö $aa > 2$ ei voi päteä.

Olemme osoittaneet, että on olemassa positiivinen reaaliluku a, jolle $aa = 2$. Lopuksi osoitamme, että a on irrationaaliluku.

Tehdään vastaoletus, että a on rationaaliluku. Tällöin on olemassa $m, n \in \mathbb{N}_1$, joille $a = \frac{m}{n}$. Voimme olettaa, että luvuilla m ja n ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin 1 eli että murtoluku $\frac{m}{n}$ on supistetussa muodossa. Tällöin $2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{mm}{nn}$, josta saamme $mm = 2nn$. Tällöin luku mm on parillinen, josta seuraa että m

on parillinen (Tehtävä 1.2.17). Voimme kirjoittaa luvun m muodossa $2r$ jollekin luonnolliselle luvulle r. Sijoittamalla $m = 2r$ yhtälöön $mm = 2nn$ saamme $2rr = nn$. Koska luku nn on parillinen, niin myös luku n on parillinen. Koska m ja n ovat parillisia, niin luvuilla m ja n on yhteinen tekijä 2. Tämä on ristiriita, joten a ei ole rationaaliluku. △

Tehtäviä lukuun 1.2.

1.2.10: Olkoon $x, y > 0$. Osoita, että $\frac{1}{\max\{x,y\}} = \min\{\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\}$.

1.2.11: Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$ epätyhjiä. Oletetaan, että a on joukon A yläraja ja b on joukon B yläraja. Tutki ovatko seuraavat väitteet tosia.

(a) $a + b$ on joukon $A \cup B$ yläraja.
(b) ab on joukon $A \cap B$ yläraja.
(c) $a - b$ on joukon $A \setminus B$ yläraja.

1.2.12: Määritä seuraavien joukkojen infimum ja supremum. (a) $[1, 3]$, (b) $(5, 7]$, (c) $[-4, 3) \cup [1, 4)$, (d) $\left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}$.

1.2.13: Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \subset B$. Osoita, että $\sup A \leqslant \sup B$ ja $\inf B \leqslant \inf A$.

1.2.14: Olkoon $m \in \mathbb{N}_1$ ja $E_n \subset \mathbb{R}$ jokaisella $n = 1, 2, \ldots, m$. Jos $s_n = \sup E_n$ ja $p_n = \inf E_n$, niin määritä $\sup(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m)$ ja $\inf(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m)$?

1.2.15: Todista Lauseen 1.2.8(b).

1.2.16: Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu ja $M \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $x \leqslant M$ kaikilla $x \in A$ ja jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $x \in A$, jolle $x > M - \varepsilon$, niin $M = \sup A$.

1.2.17: Olkoon $m \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että jos m^2 on parillinen, niin m on parillinen. Tässä $m^2 = mm$.

1.3. Matemaattinen todistaminen ja induktio

Matematiikassa tulokset todistetaan lähtien annetuista oletuksista. Oletukset voivat olla erityisesti kyseiseen tulokseen liittyviä, jolloin ne merkitään näkyviin tuloksen muotoilussa. Oletukset voivat olla myös aksioomia (eli peruslauseita), jotka ovat voimassa kaikille tuloksille ja joiden perusteella todistetaan uusia tuloksia. Ajatuksena on, että aksioomia on mahdollisimman vähän ja että ne ovat mahdollisimman yksinkertaisia. Esimerkiksi reaalilukuihin liittyvät aksioomat on esitetty luvuissa 1.1 ja 1.2.

Matematiikassa tuloksia kutsutaan lauseiksi, lemmoiksi (eli apulauseiksi) tai korollaareiksi (eli seurauksiksi). Todistus on looginen perustelu, jonka pitäisi vakuuttaa lukija tuloksen oikeellisuudesta. Matemaattinen tulos voidaan muotoilla usealla eri tavalla. Usein muotoilu on: jos jokin on voimassa, niin siitä seuraa jotain. Jos myös päinvastainen tulos on voimassa, niin tulos on tapana muotoilla kahden jos lauseen sijaan muodossa jos ja vain jos. Esimerkiksi muotoilu ″A jos ja vain jos B″ tarkoittaa, että ″jos A, niin B″, ja ″jos B, niin A″. Yleisimmin matemaattinen todistus etenee alkaen oletuksista ja päättyen lauseessa esitettyyn tulokseen. Tällaista todistusta kutsutaan suoraksi todistukseksi.

Esimerkki 1.3.1: Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.

Todistus. Olkoon luvut $a, b \in \mathbb{Z}$ parittomia. Nyt on olemassa sellaiset kokonaisluvut $p, q \in \mathbb{Z}$, että $a = 2p + 1$ ja $b = 2q + 1$. Saamme

$$a + b = (2p + 1) + (2q + 1) = 2(p + q + 1),$$

joten $a + b$ on parillinen. □

Matemaattisen tuloksen todistus voi edetä muullakin tavalla kuin suorassa todistuksessa ja näistä esimerkkeinä käsittelemme seuraavaksi epäsuoran todistuksen ja induktiotodistuksen.

Epäsuora todistus tarkoittaa todistusta, jossa johdetaan väitteen vastakohdasta tulos, joka ei ole sopusoinnussa oletusten kanssa. Väitteen vastakohtaa kutsutaan vastaoletukseksi, ja tuloksen, joka ei ole sopusoinnussa oletusten kanssa, sanotaan tuottavan ristiriidan.

Esimerkki 1.3.2: Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.

Todistus. Olkoon luvut $a, b \in \mathbb{Z}$ parittomia. Tehdään vastaoletus, että myös $a+b$ on pariton. Nyt on olemassa sellaiset kokonaisluvut $p, q \in \mathbb{Z}$, että $a = 2p+1$ ja $a + b = 2q + 1$. Tällöin

$$b = b + (a - a) = (a + b) - a = (2q + 1) - (2p + 1) = 2(q - p),$$

joten b on parillinen. Tämä on ristiriita oletuksen (b on pariton) kanssa, joten väite on tosi. □

Seuraavaksi tarkastelemme induktiotodistusta.

Induktioaksiooma: Olkoon $A \subset \mathbb{N}_1$. Jos joukolla A on ominaisuudet

(a) $1 \in A$ ja
(b) jokaisella $n \in A$ pätee, että $n + 1 \in A$,

niin $A = \mathbb{N}_1$.

Lause 1.3.3: *Olkoon P sellainen luonnollisten lukujen omainaisuus, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(a) *luvulla* 1 *on ominaisuus* P;
(b) *jokaisella* $n \in \mathbb{N}_1$ *pätee, että jos luvulla* n *on ominaisuus* P, *niin myös luvulla* $n + 1$ *on ominaisuus* P.

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ *on ominaisuus* P.

Todistus. Tutkitaan joukko $A = \{n \in \mathbb{N}_1 : \text{ luvulla } n \text{ on ominaisuus } P\}$. Tällöin induktioaksiooman nojalla $A = \mathbb{N}_1$ eli kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ on ominaisuus P. □

Lause 1.3.4: *Olkoon P sellainen luonnollisten lukujen ominaisuus, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(a) *luvulla* 1 *on ominaisuus* P;
(b) *jokaisella* $n \in \mathbb{N}_1$ *pätee, että jos kaikilla luonnollisilla luvuilla* $k \leqslant n$ *on ominaisuus* P, *niin myös luvulla* $n + 1$ *on ominaisuus* P.

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ *on ominaisuus* P.

Todistus. Tarkalleen samalla tavalla kuin Lauseen 1.3.3 todistus. □

Lauseissa 1.3.3 ja 1.3.4 kohtaa (a) kutsutaan *alkuaskeleeksi* ja kohtaa (b) *induktioaskeleeksi*.

Esimerkki 1.3.5: Todista induktiolla, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}_1$

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ratkaisu. Todistamme tuloksen Lauseen 1.3.3 avulla eli induktiolla.
Alkuaskel (a) on voimassa, koska

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Oletetaan seuraavaksi, että luvulla n on voimassa

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Osoitetaan, että induktioaskel (2) on voimassa eli että tulos pätee myös luvulla $n+1$. Nyt

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

ja tulos seuraa Lauseesta 1.3.3. △

Lauseissa 1.3.3 ja 1.3.4 kokonaislukujen joukkoa voidaan muuttaa valitsemalla kohdassa (a) kokonaisluku a luvun 1 sijaan ja korvaamalla joukko $\mathbb{N}_1$ joukolla $\{a, a+1, \ldots\}$.

Tehtäviä lukuun 1.3.

1.3.6: Todista induktiolla, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}_1$

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

1.3.7: Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

1.3.8: Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$

$$\frac{n^3 + 5n}{6}$$

on kokonaisluku.

1.4. Potenssi ja summamerkintä

Tässä luvussa tutustumme potenssin käsitteeseen reaaliluvuille silloin, kun eksponentti on kokonaisluku. Lisäksi otamme käyttöön summamerkinnän. Potenssit ovat keskeinen teema tässä kirjassa. Tässä luvussa esitellään tapaus x^n, $n \in \mathbb{Z}$. Luvussa 4.2 "Bolzanon lause ja käänteisfunktion jatkuvuus" on tapaus x^q, $q \in \mathbb{Q}$. Tapaus x^μ, $\mu \in \mathbb{R}$, on Luvuissa 6.1 "Irrationaaliluku eksponenttina", 6.2 "Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmifunktio", ja 6.3 "Yleiset eksponentti- ja potenssifunktiot".

MÄÄRITELMÄ 1.4.1: Kaikilla reaaliluvuille x määritellään $x^1 = x$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$ ja $x \in \mathbb{R}$ määritellään $x^{n+1} = x^n x$.

Funktiota $x \mapsto x^n$ kutsutaan *potenssifunktioksi* ja se on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

LAUSE 1.4.2: *Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja $m, n \in \mathbb{N}_1$ pätee*

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m, \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \textit{ja} \quad (xy)^m = x^m y^m.$$

TODISTUS. Todistetaan ensimmäinen väite. Muut kohdat todistetaan Tehtävissä 1.4.11 ja 1.4.12. Todistetaan väite induktiolla muuttujan n suhteen. Jos $n = 1$, niin väite pätee määritelmän nojalla. Tehdään induktio-oletus: väite pätee arvolla n. Tutkitaan sitten tapausta x^{m+n+1}. Määritelmän perusteella saamme $x^{m+n+1} = x^{m+n}x$. Induktio-oletuksen nojalla $x^{m+n} = x^m x^n$. Yhdistämällä nämä ja käyttämällä määritelmää saamme

$$x^{m+n+1} = x^{m+n}x = x^m x^n x = x^m x^{n+1}.$$

Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. □

Oletetaan sitten, että $x \neq 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$. Tällöin edellisen lauseen perusteella saamme $x^n x^{m-n} = x^{n+(m-n)} = x^m$. Jakamalla yhtälön molemmat puolet termillä x^n saamme $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

Seuraavaksi laajennamme potenssin määritelmän negatiivisille kokonaisluvuille ja nollalle.

MÄÄRITELMÄ 1.4.3: Reaaliluvulle $x \neq 0$ määritellään

$$x^0 = 1 \quad \text{ja} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ kun } n \in \mathbb{N}_1.$$

Huomaa, että emme määrittele laskutoimitusta 0^0. Jos määrittelisimme $0^0 = 1$, niin edellä esitetyt laskusäännöt eivät toteutuisi. Silloin saisimme esimerkiksi $1 = 0^0 = 0^{1-1} = 0^1 0^{-1} = \frac{0}{0}$.

Yhdistämällä määritelmän edellä oleviin laskusääntöihin saamme seuraavan tuloksen. Ensimmäinen väite todistetaan Tehtävässä 1.4.13.

LAUSE 1.4.4: *Kaikilla reaaliluvuilla $x \neq 0$ ja kokonaisluvuilla $m, n \in \mathbb{Z}$ pätee*

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m, \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \textit{ja} \quad (xy)^m = x^m y^m.$$

Seuraavaksi tarkastelemme Bernoullin epäyhtälöä, jonka esitti vuonna 1689 sveitsiläinen matemaatikko Jacob Bernoulli (1654–1705).

ESIMERKKI 1.4.5: Todista *Bernoullin epäyhtälö*: reaaliluvuille $x > -1$ ja luonnollisille luvuille $n = 1, 2, 3, \ldots$ on voimassa

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

RATKAISU. Todistamme lauseen induktiolla. Alkuaskel on voimassa, koska arvolla $n = 1$ saadaan

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$

Oletetaan, että luvulle n pätee $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Luvulle $n+1$ saadaan

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)\\ &= 1+nx+x++nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Väite seuraa Lauseesta 1.3.3. △

Esimerkki 1.4.6: Todista, että kokonaisluvuille $n \geqslant 3$ on voimassa

$$n^2 \geqslant 3n.$$

Ratkaisu. Todistamme lauseen induktiolla. Alkuaskel on voimassa, koska arvolla $n=3$ saadaan

$$3^2 = 9 \geqslant 9 = 3 \cdot 3.$$

Todistetaan seuraavaksi induktioaskel. Oletetaan, että luonnollisella luvulle $n \geqslant 3$ pätee

$$n^2 \geqslant 3n.$$

Luvulle $n+1$ saadaan

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geqslant 3n+2n+1 = 3n+3 = 3(n+1).$$

Väite seuraa Lauseesta 1.3.3. △

Esittelemme seuraavaksi summamerkinnän. Olkoon a ja $l \geqslant a$ kokonaislukuja ja $x_a, x_{a+1}, \ldots, x_l$ reaalilukujono. Merkitsemme

$$\sum_{k=a}^{l} x_k = x_a + x_{a+1} + \cdots + x_l.$$

Esimerkki 1.4.7: Todista induktiolla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ratkaisu. Todistamme tuloksen induktiolla.

Alkuaskel (a) on voimassa, koska

$$0 = \frac{0^2 \cdot 1^2}{4}.$$

Oletetaan seuraavaksi, että luvulla n on voimassa

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Osoitetaan, että induktioaskel (b) on voimassa eli että tulos pätee myös luvulla $n+1$. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + (4n+4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n^2+4n+4)(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}\end{aligned}$$

ja tulos seuraa Lauseesta 1.3.3. △

Lemma 1.4.9 on nimeltään binomikaava, joka on peruslaskusääntö binomikertoimille. Lukujen $n, k \in \mathbb{N}_1$, joille $k \leqslant n$, *binomikerroin* on luku

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{(1 + 2 + \cdots + k)(1 + 2 + \cdots + (n-k))}.$$

Merkintä $\binom{n}{k}$ luetaan "n alle k" tai "n yli k:n".

Lemma 1.4.8: *Olkoon $n, k \in \mathbb{N}_1$ ja $k < n$. Silloin*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Todistus. Todistus saadaan laskemalla

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$ □

Lemma 1.4.9: (Binomikaava) *Olkoon $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $n \in \mathbb{N}_1$. Silloin*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Todistus. Todistamme tuloksen induktiolla. Koska arvolla $n = 1$ saamme

$$(x+y)^n = x + y = x^1 y^0 + x^0 y^1,$$

niin alkuaskel on voimassa.

Oletamme seuraavaksi, että tulos on voimassa arvolla n. Luvulle $n+1$ saamme induktio-oletuksen ja Lemman 1.4.8 avulla

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$ □

Lemma 1.4.10: *Olkoon $a, q \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}_1$. Silloin*

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{kun } q \neq 1,$$

ja $s_n = na$, kun $q = 1$.

Todistus. Jälkimmäinen väite on selvä. Osoitetaan ensimmäinen väite induktiolla.

Alkuaskel. Kun $n = 1$, niin

$$s_1 = x_0 + x_1 = a + aq = a(1+q) = a(1+q)\frac{1-q}{1-q} = a\frac{1-q^2}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Siis kaava pätee arvolla $n = 1$.

Induktioaskel. Oletetaan, että kaava pätee, kun $n = k-1$, eli

$$s_k = a\frac{1-q^k}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Osoitetaan, että kaava pätee, kun $n = k$. Nyt

$$\begin{aligned} s_{k+1} = s_k + x_{n+1} &\overset{\text{i.o.}}{=} a\frac{1-q^k}{1-q} + aq^k = a\left(\frac{1-q^k}{1-q} + q^k\right) = a\left(\frac{1-q^k}{1-q} + \frac{q^k(1-q)}{1-q}\right) \\ &= a\frac{1-q^k+q^k-q^kq}{1-q} = a\frac{1-q^{k+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla kaava on näin ollen voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, kun $q \neq 1$. □

Tehtäviä lukuun 1.4.

1.4.11: Osoita induktiolla muuttujan m suhteen, että kaikilla $n, m \in \mathbb{N}_1$ ja $x \in \mathbb{R}$ pätee $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

1.4.12: Osoita induktiolla, että kaikilla $m \in \mathbb{N}_1$ ja $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $(xy)^m = x^m y^m$.

1.4.13: Osoita, että $x^m x^n = x^{m+n}$ kaikilla $x \neq 0$ ja $m, n \in \mathbb{Z}$. Käy erikseen läpi tapaukset, että m ja n ovat samanmerkkisiä ja että m ja n ovat erimerkkisiä.

1.4.14: Osoita, että

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.4.15: Todista seuraava epäyhtälö: kokonaisluvulle $n \in \mathbb{N}_0$ on voimassa

$$(n+1)! \geqslant 2^n.$$

1.5. Funktion määritelmä, injektio, surjektio ja bijektio

Tässä luvussa esittelemme funktion ja yleisemmän relaation käsitteet. Tarkastelemme myös sitä, milloin relaatio on funktio. Vaikka lukujonon määritelmässä tarvitaan funktion käsitettä, niin varsinaisesti tämän luvun asioita tarvitaan Luvusta 3 ”Funktion raja-arvo” alkaen.

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Määritellään joukkojen A ja B *karteesinen tulo*, eli tulojoukko, asettamalla

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

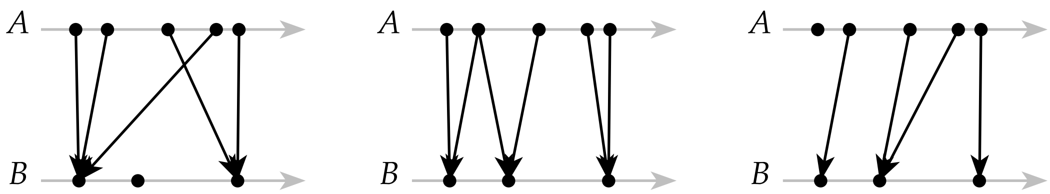
Jos $R \subset A \times B$, niin sanotaan, että R on *relaatio* joukosta A joukkoon B. Esimerkiksi, jos asetamme $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{3, 4\}$, niin

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Tällöin esimerkiksi joukko $\{(1, 3), (1, 4)\}$ on relaatio joukosta A joukkoon B.

Määritelmä 1.5.1: Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Relaatio $R \subset A \times B$ on *funktio* (eli *kuvaus*), jos jokaista $a \in A$ kohti on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle $(a, b) \in R$. Tällöin merkitään $R \colon A \to B$. Joukkoa A sanotaan funktion R *määrittelyjoukoksi* tai *lähtöjoukoksi*, joukkoa B sanotaan funktion R *arvojoukoksi* tai *maalijoukoksi*.

Funktiota $f \colon A \to B$ sanotaan *reaalimuuttujan* funktioksi, jos sen määrittelyjoukko A on reaalilukujen osajoukko, ja *reaaliarvoiseksi* funktioksi, jos sen arvojoukko B on reaalilukujen osajoukko. Yleensä käsittelemme funktioita, jotka on annettu muodossa $f \colon A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}$. Funktiota voidaan myös merkitä $x \mapsto f(x)$. Jos funktiolla on lauseke, niin se voidaan antaa suljetussa muodossa, esimerkiksi $f(x) = 1 + x^2$.



Kuva 1.2. Kolme relaatiota joukosta A joukkoon B, joista vain vasemmanpuoleisin on funktio.

Kuvassa 1.2 on esitetty kolme relaatiota, joista vain vasemmanpuoleisin on funktio. Keskimmäinen ei ole funktio, koska yhteen määrittelyjoukon alkioon liittyy kaksi arvojoukon alkiota. Oikeanpuoleisin ei ole funktio, koska yhteen määrittelyjoukon alkioon ei liity yhtään arvojoukon alkiota.

Usein funktion määrittelyssä esiintyvät joukot ovat välejä.

Määritelmä 1.5.2: Joukko $\Delta \subset \mathbb{R}$ on *väli*, jos se on jotakin seuraavista tyypeistä: $[a, a] = \{a\}$, (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ tai $\mathbb{R}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Relaatiolle voidaan helposti määritellä käänteisrelaatio. Jos $R \subset A \times B$, niin määritellään sen *käänteisrelaatio* asettamalla

$$R^{-1} = \{(b, a) \colon (a, b) \in R\}.$$

Tällöin $R^{-1} \subset B \times A$. Esimerkiksi joukosta $A = \{1, 2, 3\}$ joukkoon $B = \{3, 4\}$ määrittelemämme relaation $\{(1, 3)(1, 4)\}$ käänteisrelaatio joukosta B joukkoon A on $\{(3, 1), (4, 1)\}$.

On syytä huomata, että funktion käänteisrelaatio ei välttämättä ole funktio, kuten on Kuvassa 1.2 vasemmalla olevan funktion tapauksessa.

Määritelmä 1.5.3: Olkoon $f\colon A \to B$ funktio. Jos $A' \subset A$, niin

$$f(A') = \{f(a) \in B \colon a \in A'\}.$$

Joukkoa $f(A')$ kutsutaan joukon A' *kuvaksi*. Jos $B' \subset B$, niin

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \colon f(a) \in B'\}.$$

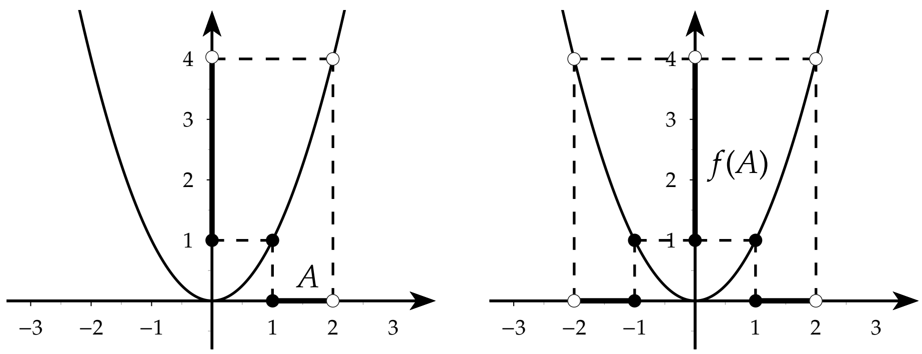
Joukkoa $f^{-1}(B')$ kutsutaan joukon B' *alkukuvaksi*.

Seuraavassa esimerkissä huomaamme, että joukon A kuvan $f(A)$ alkukuva ei välttämättä ole joukko A, eli voi olla, että $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

Esimerkki 1.5.4: Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Määritä joukon $A = [1, 2)$ kuva ja joukon $f(A)$ alkukuva.

Ratkaisu. Tarkastellaan tilannetta Kuvassa 1.3 esitetyn kuvaajan perusteella. Nyt

$$f(A) = [1, 4) \quad \text{ja} \quad f^{-1}(f(A)) = (-2, -1] \cup [1, 2). \qquad \triangle$$



Kuva 1.3. Joukon $A = [1, 2)$ kuva vasemmalla ja joukon $f(A) = [1, 4)$ alkukuva oikealla.

Seuraavaksi käsittelemme kysymystä, milloin funktion käänteisrelaatio on funktio.

Määritelmä 1.5.5: Funktio $f\colon A \to B$ on *injektio*, jos $f(a_1) \neq f(a_2)$ aina, kun $a_1 \neq a_2$.

Vaihtoehtoisesti injektion voi määritellä vaatimalla, että $f(a_1) = f(a_2)$, jos ja vain jos $a_1 = a_2$. Kolmas tapa on sanoa, että jokaista $b \in B$ kohti on olemassa *korkeintaan* yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$.

Määritelmä 1.5.6: Funktio $f\colon A \to B$ on *surjektio*, jos $f(A) = B$.

Vaihtoehtoisesti määritellen funktio on surjektio, jos jokaista $b \in B$ kohti on olemassa *vähintään* yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$.

Määritelmä 1.5.7: Funktio $f: A \to B$ on *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio.

Vaihtoehtoisesti bijektiivisyys voidaan määritellä vaatimalla, että jokaista $b \in B$ kohti on olemassa *täsmälleen* yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$.

Esimerkki 1.5.8: Osoita, että

(a) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on injektio mutta ei ole surjektio;
(b) $g: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ on surjektio mutta ei ole injektio;
(c) $h: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $h(x) = x$ on bijektio.

Ratkaisu. (a) Selvästi $f(x_1) = f(x_2)$, jos ja vain jos $x_1 = x_2$. Funktio ei ole surjektio, koska mikään luku ei kuvaudu (esimerkiksi) luvulle -1.

(b) Funktio g on surjektio, koska $g(\sqrt{x}) = x$. Funktio ei ole injektio, koska (esimerkiksi) $g(-1) = 1 = g(1)$.

(c) Sama todistus kuin (a) kohdassa antaa, että funktio h on injektio. Se on surjektio, koska jokaista $x \in [0, \infty)$ kohti löytyy välin $[0, \infty)$ luku, joka kuvautuu sille, nimittäin $h(x) = x$. △

Lause 1.5.9: *Olkoon $f: A \to B$. Funktion käänteisrelaatio f^{-1} on funktio, jos ja vain jos funktio f on bijektio.*

Todistus. Tehtävä 1.5.21. □

Käsitellään seuraavaksi funktioiden pisteittäisiä laskutoimituksia. Olkoot $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ ja $m \in \mathbb{R}$. Määrittelemme näiden avulla uudet funktiot $f + g$, mf ja $\frac{f}{g}$ asettamalla, että

$$\begin{aligned} f + g &: A \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x); \\ mf &: A \to \mathbb{R}, \quad (mf)(x) = mf(x); \\ \frac{f}{g} &: A \setminus \{x : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Lopuksi tutustumme yhdistettyyn funktioon.

Määritelmä 1.5.10: Olkoot $A, B, C \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$ ja $g: B \to C$. Määritellään funktio $A \to C$ asettamalla $x \mapsto g(f(x))$. Näin määriteltyä funktiota kutsutaan funktioiden f ja g *yhdistetyksi funktioksi* ja merkitään $g \circ f$.

Esimerkiksi $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 4x^2$, voidaan ymmärtää funktioiden $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, ja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, yhdistettynä funktiona $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lause 1.5.11: *Olkoot $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to C$ ja $h: C \to D$. Funktioiden yhdistäminen on liitännäinen toimitus eli*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

TODISTUS. Jokaisessa pisteessä $x \in A$ pätee

$$\begin{aligned}((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x).\end{aligned}$$ □

Käsittelemme seuraavaksi lyhyesti polynomeja. Oletamme, että polynomit ovat lukijalle tuttuja.

Laskemalla yhteen potenssifunktioita ja vakiofunktion saamme polynomifunktion.

MÄÄRITELMÄ 1.5.12: Funktio $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *polynomi*, jos se on muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0,$$

missä $a_n, \ldots, a_0$ ovat reaalikertoimia. Jos $a_n \neq 0$, niin sanotaan, että polynomin P *aste* on n.

Olkoon $f\colon A \to B$. Jos jollakin $x \in A$ pätee $f(x) = 0$, niin lukua x kutsutaan funktion f *nollakohdaksi*.

Esitämme seuraavat kolme lausetta ilman todistuksia, jotka löytyvät esimerkiksi Lauri Myrbergin kirjasta [**21**] sivuilta 80–83.

LAUSE 1.5.13: *Olkoon $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomi. Jos sillä on nollakohta x_0, niin P voidaan esittää muodossa*

$$P(x) = (x - x_0)Q(x),$$

missä $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on polynomi.

LAUSE 1.5.14: *Olkoon $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-asteinen polynomi. Jos sillä on nollakohdat $x_1, \ldots, x_n$, niin P voidaan esittää muodossa*

$$P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

missä a_n polynomin P korkeimman asteen termin kerroin.

LAUSE 1.5.15: *Olkoon $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-asteinen polynomi. Tällöin sillä on korkeintaan n eri nollakohtaa.*

MÄÄRITELMÄ 1.5.16: Olkoot $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomeja. Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_n$ ovat polynomin Q nollakohdat. Funktiota $R\colon \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}$,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

sanotaan *rationaalifunktioksi*.

Tehtäviä lukuun 1.5.

1.5.17: Olkoot $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ joukkoja. Määrittele, jos mahdollista, joukosta A joukkoon B relaatio, joka

(a) on funktio ja jonka käänteisrelaatio on funktio,

(b) on funktio ja jonka käänteisrelaatio ei ole funktio,
(c) ei ole funktio ja jonka käänteisrelaatio on funktio,
(d) ei ole funktio ja jonka käänteisrelaatio ei ole funktio.

1.5.18: Olkoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ kun $x \geqslant 0$ ja $f(x) = -x$ kun $x < 0$, $A = (-1, 2)$, $B = [-2, -1] \cup [0, 1]$ ja $C = (1, 2]$. Määritä joukkojen A, B ja C kuvat $f(A)$, $f(B)$ ja $f(C)$ sekä joukkojen $f(A)$, $f(B)$ ja $f(C)$ alkukuvat.

1.5.19: Olkoot $A = (-2, -1)$, $B = (0, 1] \cup (2, 3)$ ja $C = (-2, \infty)$. Määritä sellainen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että $f(A) = B$ ja $f^{-1}(B) = C$.

1.5.20: Tutki, mitkä seuraavista funktioista ovat injektioita ja mitkä surjektioita:
(a) $f\colon [0, 2] \to [0, 1]$, $f(x) = x - 1$ kun $x \geqslant 1$ ja $f(x) = 1 - x$ kun $x < 1$,
(b) $g\colon [-1, 1] \to [0, 2]$, $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x < 0, \\ x^2, & \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$
(c) $h\colon [0, 1] \to [-\frac{1}{4}, 0]$, $h(x) = x^2 - x$.

1.5.21: Todista Lause 1.5.9.

1.5.22: Olkoot $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f(x) = x$ kun $x \leqslant 0$ ja $f(x) = -x$ kun $x > 0$, ja $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = x^2$. Määritä funktiot $g \circ f$ ja $f \circ g$.

1.5.23: Olkoot $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ bijektioita. Osoita, että $g \circ f\colon A \to C$ on bijektio.

1.5.24: Tässä tehtävässä johdetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaava. Olkoon $P(x) = ax^2 + bx + c$, missä a, b, $c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Määritä polynomin P nollakohdat. Vihje: kirjoita yhtälö muodossa $ax^2 + bx = -c$, täydennä vasen puoli neliöksi ja ratkaise x.

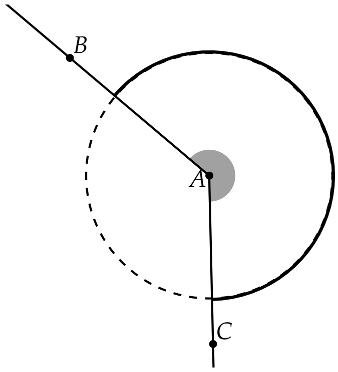
1.6. Trigonometristen funktioiden geometrinen määritelmä

Oletamme, että trigonometriset funktiot ovat lukijalle tuttuja, ja esitämme tässä ainoastaan sini- ja kosinifunktioiden perusominaisuuksia.

Reaaliluku π on yksisäteisen puoliympyrän kaaren pituus. Haluamme että funktioilla $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on seuraavat ominaisuudet:
(a) $\sin(0) = 0$ ja $\cos(0) = 1$;
(b) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;
(c) $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ ja $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;
(d) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;
(e) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$;
(f) $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Näistä ominaisuuksista voidaan johtaa kaikki muut sini- ja kosinifunktioiden ominaisuudet. Yllä olevat ominaisuudet voidaan myös johtaa yksikköympyrästä, kun meillä on käytössä reaalitason perusominaisuudet, ympyrän kaaren pituus ja pinta-alan käsite. Näytämme seuraavaksi kuinka tämä trigonometristen funktioiden geometrinen määritelmä toimii. Vaihtoehtoisesti trigonometriset funktiot voidaan määritellä analyyttisesti sarjojen avulla, katso Luku 15.5.

Asetetaan kulma yksikköympyrän päälle siten, että kulman kärki on ympyrän keskipisteessä. Tällöin kulma rajaa yksikköympyrästä kaaren, katso Kuva 1.4. Kulman suuruudella tarkoitamme tämän kaaren pituutta, joten kulman suuruus on aina välillä $[0, 2\pi]$.



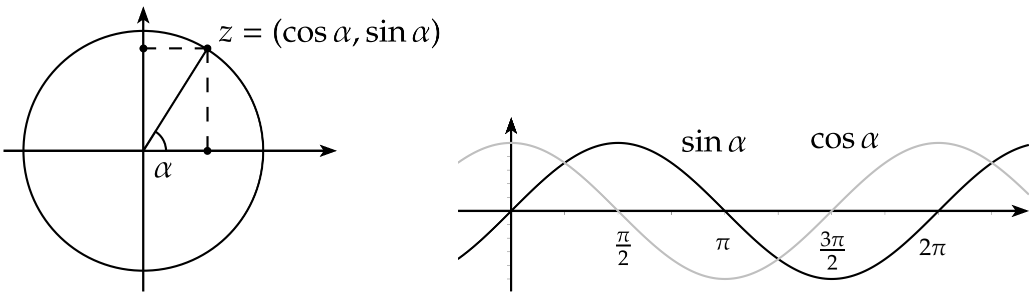
Kuva 1.4. Kulma B, A, C ja sitä vastaava yksikköympyrän kaari.

Merkinnällä $\measuredangle(B, A, C)$ tarkoitamme sellaisen kulman suuruutta, jonka kärki on pisteessä A ja jonka vasen kylki kulkee pisteen B kautta ja oikea kylki pisteen C kautta, katso Kuva 1.4.

Funktiot $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ja $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ovat funktioita, jotka geometrisesti tulkittuna antavat yksikköympyrän pisteen $P = (\cos x, \sin x)$, missä x on $\measuredangle(P, (0, 0), (1, 0))$, katso Kuva 1.5. Nyt on selvää, että $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ja $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Lisäksi huomataan, että $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, katso Tehtävä 1.6.4.

Määritelmä 1.6.1: Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha' \in [0, 2\pi)$, sellainen reaaliluku, että $\alpha = \alpha' + k2\pi$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$, ja $z = (x, y)$ se yksikköympyrän piste, jolle $\measuredangle(z, (0, 0), (1, 0)) = \alpha'$. Silloin määrittelemme funktiot sini ja ja kosini

$$\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \sin\alpha = y, \quad \cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \cos\alpha = x.$$



Kuva 1.5. Yksikköympyrä ja trigonometriset funktiot.

Määritelmän mukaan suorakulmaisen kolmion (kummalle tahansa) terävälle kulmalle α on voimassa

$$\sin\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}},$$

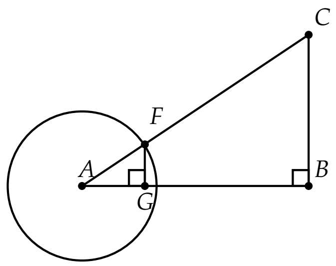
$$\cos\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}.$$

Todistetaan näistä ensimmäinen, kun hypotenuusan pituus on vähintään yksi. Todistus tapauksessa hypotenuusan pituus on alle yksi on samanlainen. Olkoon

ABC suorakulmainen kolmio, jonka kulma B on suorakulma. Tutkitaan kulman A siniä ja olkoon α kulman A suuruus. Piirretään yksikköympyrä, jonka keskipiste on A. Piirretään yksikköympyrän ja hypotenuusan leikkauspisteestä F normaali kulman A toiselle kyljelle, katso Kuva 1.6. Olkoon G normaalin kantapiste. Tällöin sinin määritelmän nojalla $\sin(\alpha)$ on janan FG pituus $|FG|$. Koska kolmiot ABC ja AFG ovat yhdenmuotoisia (kk), niin saamme

$$\frac{|FG|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|AC|},$$

josta väite seuraa, koska $|AF| = 1$.



Kuva 1.6. Kulman A sini suorakulmaisessa kolmiossa ABC.

Lemma 1.6.2: *Kaikille reaaliluvuille $x, y \in \mathbb{R}$ ovat voimassa yhteenlaskukaavat*

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y,\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y,\\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y,\\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan viimeinen yhtälö. Olkoot $Q = (1,0)$, $P_x = (\cos x, \sin x)$, $P_y = (\cos y, \sin y)$ ja $P_{x-y} = (\cos(x-y), \sin(x-y))$, katso Kuva 1.7. Nyt $\measuredangle(P_x, 0, P_y) = \measuredangle(P_{x-y}, 0, Q)$, joten $|P_xP_y| = |P_{x-y}Q|$. Tästä seuraa

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (\cos(x-y) - 1)^2 + \sin^2(x-y)$$

ja koska $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, niin saadaan edelleen

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y).$$

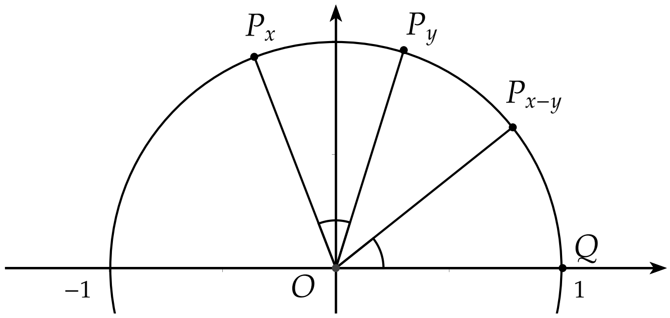
Muut kolme yhtälöä todistetaan Tehtävässä 1.6.5, ne seuraavat tässä todistetusta tuloksesta käyttämällä kaavoja $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$. □

Lemma 1.6.3: *Sini- ja kosinifunktioille on voimassa*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \textit{kun } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Tehtävässä 1.6.6 todistetaan epäyhtälö negatiivisille muuttujan x arvoille.

Todistus. Olkoon $0 < \alpha < \pi/2$ ja merkitään pisteitä $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ja $Q = (1,0)$. Origon ja pisteen P kautta kulkevan suoran yhtälö on $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x$,



Kuva 1.7. Funktio $\cos(x - y)$ graafisesti tulkittuna.

joten se leikkaa suoran $x = 1$ pisteessä $R = (1, \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})$. Saadaan (katso Kuva 1.8)

$$\triangle OQP \text{ pinta-ala} = \frac{\sin\alpha}{2}, \quad \text{sektorin } OQP \text{ pinta-ala} = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\pi 1^2 = \frac{\alpha}{2}$$

ja

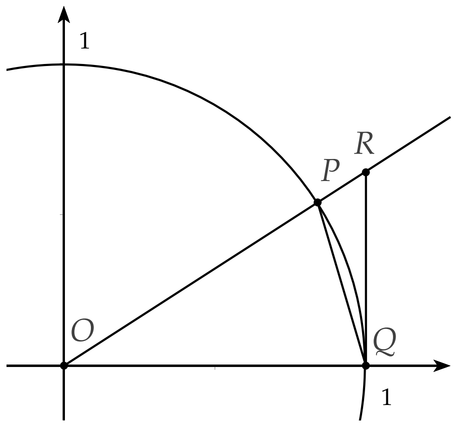
$$\triangle OQR \text{ pinta-ala} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Koska

$$\triangle OQP \text{ pinta-ala} < \text{sektorin } OQP \text{ pinta-ala} < \triangle OQR \text{ pinta-ala},$$

niin

$$\frac{\sin\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}.$$

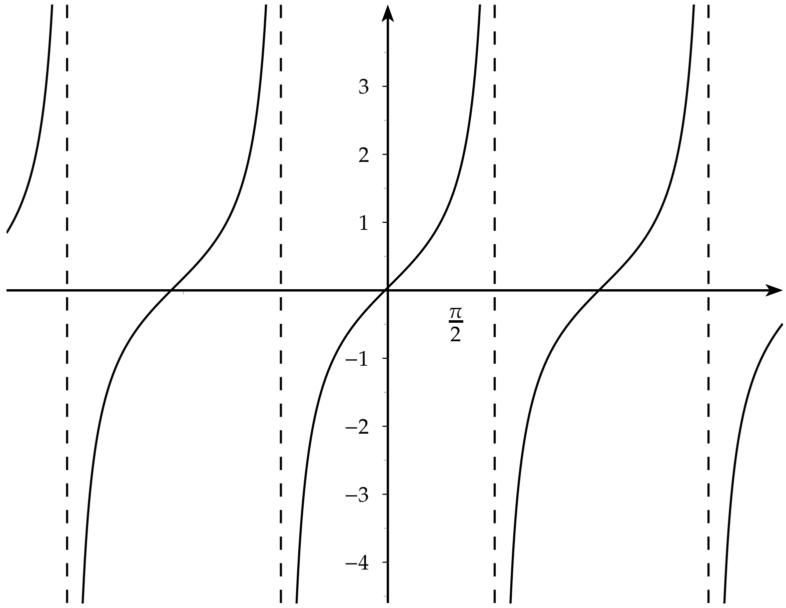


Kuva 1.8. Kolmiot $\triangle OQP$ ja $\triangle OQR$ ja sektori OQP.

Luvun α valinnan perusteella $\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$ ja $\cos\alpha > 0$, joten

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1. \qquad \square$$

Sini- ja kosinifunktion avulla voidaan määritellä myös muita trigonometrisiä funktioita. Tärkein näistä on tangenttifunktio $\tan\colon \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + n\pi \colon n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, joka määritellään $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Funktion $x \mapsto \tan x$ kuvaaja on esitetty Kuvassa 1.9.



KUVA 1.9. Tangenttifunktion kuvaaja.

Tehtäviä lukuun 1.6.

1.6.4: Perustele kuvien avulla, että $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.

1.6.5: Todista Lemman 1.6.2 kolme ensimmäistä yhtälöä viimeisen yhtälön avulla.

1.6.6: Osoita, että

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{kun } -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Osa 1

Raja-arvo

LUKU 2

Lukujonon raja-arvo

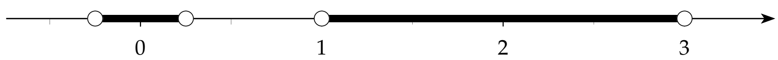
2.1. Itseisarvo

Esittelemme tässä luvussa reaaliluvun itseisarvon, kahden reaaliluvun välisen etäisyyden ja niihin liittyvän kolmioepäyhtälön. Kahden reaaliluvun välisellä etäisyydellä on keskeinen merkitys niin lukujonon raja-arvon kuin funktion raja-arvon käsitteissä.

MÄÄRITELMÄ 2.1.1: Reaaliluvun x *itseisarvo* määritellään seuraavasti:
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Itseisarvo on aina ei-negatiivinen luku ja se on nolla, jos ja vain jos luku itse on nolla. Lisäksi pätee, että $|x| = |-x|$.

Geometrisesti $|x|$ tulkitaan reaaliakselilla luvun x etäisyydeksi origosta. Tällä tulkinnalla huomaamme, että $|x| < h$, $h > 0$, tarkoittaa reaaliakselin niitä lukuja, joiden etäisyys origosta on vähemmän kuin h eli saamme joukon $(-h, h)$. Lauseke $|x - y|$ tulkitaan geometrisesti lukujen x ja y väliseksi etäisyydeksi. Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $h > 0$, niin mitkä luvut y toteuttavat epäyhtälön $|x - y| < h$? Käyttämällä geometrista tulkintaa huomaamme, että luvun y etäisyyden luvusta x on oltava vähemmän kuin h, joten saamme joukon $(x - h, x + h)$.



KUVA 2.1. Lausekkeet $|x| < \frac{1}{4}$ ja $|2 - y| < 1$ tulkittuna geometrisesti.

Jatkossa tulemme käyttämään paljon muodossa $0 < |x - y| < h$ olevaa ehtoa, missä reaaliluku x on kiinteä. Edellisistä ehdoista tämä eroaa sillä, että lukujen x ja y ei sallita olevan samoja, katso Kuva 2.2.

KUVA 2.2. Lausekkeet $0 < |x| < \frac{1}{4}$ ja $0 < |2 - y| < 1$ tulkittuna geometrisesti.

Seuraava kolmioepäyhtälö on usein hyödyllinen arvioitaessa lausekkeita.

Lause 2.1.2: *Kolmioepäyhtälöt*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

ovat voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Todistus. Todistetaan ensin väitteen oikea puoli. Itseisarvon määritelmän perusteella

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

ja vastaavasti luvulle y

$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Laskemalla epäyhtälöt puolittain yhteen saamme

$$-\big(|x| + |y|\big) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

eli

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

joka on väitteen oikea puoli.

Todistetaan seuraavaksi väitteen vasen puoli. Oikean puolen avulla saamme

$$|x| = |x + y + (-y)| \leqslant |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

josta seuraa

$$|x| - |y| \leqslant |x + y|.$$

Vaihtamalla muuttujien x ja y paikkaa symmetrisesti saamme

$$-\big(|x| - |y|\big) = |y| - |x| \leqslant |y + x| = |x + y|.$$

Kertomalla epäyhtälö luvulla -1 saamme

$$|x| - |y| \geqslant -|x + y|.$$

Olemme saaneet

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y|,$$

joka on väitteen vasen puoli. □

Soveltamalla kolmioepäyhtälöä (Lause 2.1.2) luvuille x ja $-y$ sekä muistamalla, että $|y| = |-y|$, saamme seuraavan tuloksen.

Korollaari 2.1.3: *Epäyhtälöt*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$$

ovat voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Esimerkki 2.1.4: Oletetaan, että $|x - 4| < 4^{-99}$ ja $|y - 7| < 4^{-33}$. Päteekö, että $|x + y - 11| < 4^{-32}$?

Ratkaisu. Kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla saamme

$$|x + y - 11| = |x - 4 + y - 7| \leqslant |x - 4| + |y - 7|.$$

Käyttämällä esimerkin oletuksia ja arvioimalla lukua 4^{-99} ylöspäin saamme

$$|x - 4| + |y - 7| < 4^{-99} + 4^{-33} < 4^{-33} + 4^{-33} = 2 \cdot 4^{-33} < 4 \cdot 4^{-33} = 4^{-32},$$

joten esitetty epäyhtälö pätee. △

LAUSE 2.1.5: *Epäyhtälö $|x| \leqslant |y|$ on voimassa, jos ja vain jos $x^2 \leqslant y^2$.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $|x| \leqslant |y|$. Tällöin

$$|x|^2 = |x||x| \leqslant |x||y| \leqslant |y||y| = |y|^2.$$

Itseisarvon määritelmän nojalla kaikilla reaaliluvuilla pätee, että $|x|^2 = x^2$. Saamme $x^2 \leqslant y^2$.

Oletetaan sitten, että $x^2 \leqslant y^2$. Koska itseisarvon määritelmän nojalla $x^2 = |x|^2$, niin nyt on voimassa $|x|^2 \leqslant |y|^2$. Koska $|x| \geqslant 0$ ja $|y| \geqslant 0$, niin $|x| \leqslant |y|$. □

ESIMERKKI 2.1.6: Ratkaise epäyhtälö

$$\left|\frac{x-1}{x+4}\right| < 1.$$

RATKAISU. Itseisarvolausekkeen jakaja on nolla, kun $x = -4$. Oletetaan, että $x \neq -4$. Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin saamme (Lause 2.1.5)

$$\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^2 < 1.$$

Se voidaan kirjoittaa muotoon $(x-1)^2 < (x+4)^2$ ja edelleen muotoon $10x > -15$. Ratkaisuksi saamme siis $x > -\frac{3}{2}$. △

Tehtäviä lukuun 2.1.

2.1.7: Olkoon h positiivinen reaaliluku. Todista itseisarvon määritelmän nojalla, että $|x| \leqslant h$ jos ja vain jos $x \in [-h, h]$.

2.1.8: Todista itseisarvon määritelmän nojalla, että $|xy| = |x||y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

2.1.9: Tutkitaan ehtoja $|x-3| < 10^{-4}$ ja $|y-5| < 4^{-44}$.

(a) Kirjoita molemmat ehdot väleinä muodossa $x \in (a_1, a_2)$ ja $y \in (b_1, b_2)$.
(b) Piirrä tilanteesta kuva.
(c) Onko olemassa reaalilukua, joka toteuttaa molemmat ehdot?

2.1.10: Mitkä luvut x toteuttavat epäyhtälön $|7x-1| < 2$?

2.1.11: Oletetaan, että $|x-7| < 4^{-42}$ ja $|35-y| < 2^{-42}$. Mitä voidaan sanoa lukujen $x+y$ ja 42 välisestä etäisyydestä?

2.1.12: Oletetaan, että $|x-7| < 4^{-42}$ ja $|35-y| < 2^{-42}$. Mitä voidaan sanoa luvun xy suuruudesta?

2.1.13: Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat epäyhtälön $x-1 < |x-1|$?

2.1.14: Oletetaan, että reaaliluvut x, y ja z toteuttavat ehdot $y \leqslant x \leqslant z$. Osoita, että $|x| \leqslant \max\{|y|, |z|\} \leqslant |y| + |z|$. Onko väite $|x| \leqslant \min\{|y|, |z|\}$ aina totta?

2.1.15: Etsi sellainen positiivinen reaaliluku m, että $|x^2-1| \leqslant m|x-1|$ kaikilla $x \in (0, 2)$.

2.2. Lukujonon raja-arvo

Tässä luvussa esittelemme lukujonon ja sen suppenemiseen liittyviä tuloksia. Suppenevan lukujonon raja-arvo on keskeinen käsite funktion jatkuvuuden käsittelyssä ja sarjoissa.

Määritelmä 2.2.1: Jos jokaista lukua $n \in \mathbb{N}_0$ tai $n \in \mathbb{N}_1$ asetetaan vastaamaan reaaliluku x_n, niin syntyy *lukujono*

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \quad \text{tai} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

tai lyhyemmin (x_n). Lukujono on siis funktio $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ tai funktio $\mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$.

Yksinkertainen lukujono saadaan asettamalla $x_n = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Toinen yksinkertainen esimerkki saadaan asettamalla $x_n = 1$, jos n on parillinen, ja $x_n = 2$, jos n on pariton.

Määritelmä 2.2.2: Lukujono (x_n) *suppenee* kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

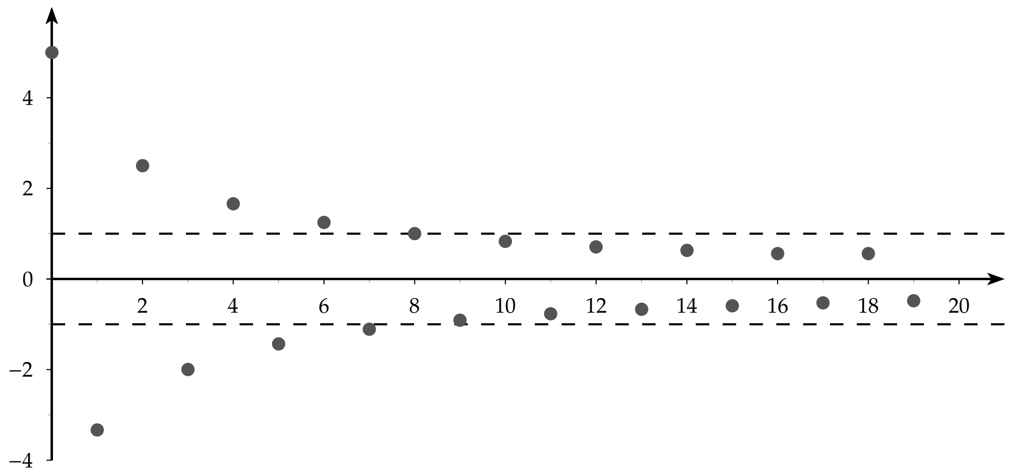
$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Tällöin sanotaan, että lukujonolla (x_n) on *raja-arvo* a ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{tai} \quad x_n \to a, \text{ kun } n \to \infty.$$

Jos lukujono ei suppene, niin se *hajaantuu*.

Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n \frac{10}{n+2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Tämän lukujonon kaksikymmentä ensimmäistä jäsentä on esitetty Kuvassa 2.3 koordinaatteina (n, x_n), $n = 0, \ldots, 19$. Kuvasta voi arvata, että lukujono suppenee kohti lukua 0. Kuinka raja-arvon määritelmä näkyy kuvassa? Kuvassa on visualisoitu tilanne $\varepsilon = 1$. Tätä vastaa katkoviivoin piirretyt suorat $y = \pm 1$. Indeksin n arvosta 9 alkaen koordinaattipisteet ovat katkoviivojen välissä eli näille luvuille pätee $|x_n - 0| < 1$. Todistetaan seuraavaksi tarkasti, että lukujono suppenee kohti lukua 0.



Kuva 2.3. Lukujonon $x_n = (-1)^n \frac{10}{n+2}$ kaksikymmentä ensimmäistä jäsentä.

Esimerkki 2.2.3: Osoita määritelmän nojalla, että lukujono (x_n), missä $x_n = (-1)^n \frac{5}{n/2+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$, suppenee kohti lukua 0.

Meidän on arvioitava lauseketta $|x_n - 0|$. Sijoittamalla tähän luvun x_n määritelmän saamme

$$\left|(-1)^n \frac{5}{\frac{1}{2}n+1} - 0\right| = \frac{5}{\frac{1}{2}n+1} = \frac{10}{n+2}.$$

Meidän on löydettävä lausekkeelle yläraja, joten arvioimme sitä ylöspäin pienentämällä jakajaa:

$$\left|(-1)^n \frac{5}{\frac{1}{2}n+1} - 0\right| = \frac{10}{n+2} < \frac{10}{n}.$$

Olemme löytäneet sopivan helpon ylärajan lausekkeelle $|x_n - 0|$. Jos $\frac{10}{n} \leqslant \varepsilon$, niin silloin myös $|x_n - 0| < \varepsilon$. Millä luonnollisilla luvuilla pätee $\frac{10}{n} \leqslant \varepsilon$? Ratkaisemalla tästä epäyhtälöstä n saamme $n \geqslant \frac{10}{\varepsilon}$. Valitsemme luvuksi n_ε pienimmän luonnollisen luvun, jolle $n_\varepsilon \geqslant \frac{10}{\varepsilon}$. Tällöin ehto pätee (ainakin) kaikilla $n > n_\varepsilon$. Olemme löytäneet ratkaisun tehtävälle. Nyt meidän täytyy vielä kirjoittaa ratkaisu muotoon, josta lukijan on helppo tarkistaa sen oikeellisuus. Kokoamme siis edelle esitetty asiat hieman eri järjestyksessä kokonaisuudeksi.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon \geqslant \frac{10}{\varepsilon}$. Tällöin

$$\left|(-1)^n \frac{5}{\frac{1}{2}n+1} - 0\right| = \frac{5}{\frac{1}{2}n+1} = \frac{10}{n+2} < \frac{10}{n} < \frac{10}{\frac{10}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. △

Esimerkki 2.2.4: Osoita määritelmän nojalla, että lukujono (x_n), missä $x_n = 2 + \frac{1}{2n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, suppenee kohti lukua 2.

Toimimme taas samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä. Suttupaperilla arvioimme ensin lauseketta $|x_n - 2|$, jotta löydämme sille käyttökelpoisen ylärajan. Tämän jälkeen voimme valita luvun n_ε. Lopuksi kokoamme ratkaisun suttupaperilta ja muutamme järjestyksen lukijaystävälliseksi.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Nyt $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ ja jokaiselle $n > n_\varepsilon$ on voimassa $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon}$. Tällöin

$$|x_n - 2| = \left|\frac{1}{2n-1}\right| = \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n+n-1} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

kaikilla $n > n_\varepsilon$. △

Kun osoitamme määritelmän nojalla, että lukujono suppenee, niin arvioimme lauseketta $|x_n - a|$ ylhäältä päin. Tämän arvioinnin voi tehdä usealla eri tavalla. Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa (x_n), missä $x_n = \frac{3}{x^2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Nyt voimme sieventää

$$|x_n - 0| = \left|\frac{3}{n^2} - 0\right| = \frac{3}{n^2}$$

ja arvioida

$$|x_n - 0| = \frac{3}{n^2} \leqslant \frac{3}{n}.$$

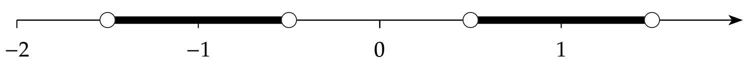
Nyt voimme arvioida, että $\frac{3}{n^2} < \varepsilon$ ja siten saamme $n_\varepsilon^1 > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$. Voimme myös arvioida, että $\frac{3}{n} < \varepsilon$ ja saamme $n_\varepsilon^2 > \frac{3}{\varepsilon}$. Määritelmässä esiintyväksi luvuksi n_ε voimme valita kumman tahansa luvuista n_ε^1 ja n_ε^2.

Esimerkki 2.2.5: Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Osoita, että lukujono hajaantuu.

Ratkaisu. Oletetaan, että lukujono suppenee kohti lukua a. Määritelmän mukaan lukua $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vastaa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Kun n on parillinen, niin $x_n = 1$ ja luku a on välillä $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Kun n on pariton, niin $x_n = -1$ ja luku a on välillä $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Tilanne on esitetty Kuvassa 2.4. Koska luvun a tulee olla molemmilla väleillä $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ja $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ja niillä ei ole yhteisiä pisteitä, saamme ristiriidan. Ei siis ole olemassa lukua a, jota kohti lukujono suppenisi. Näin ollen lukujono hajaantuu. △



Kuva 2.4. Lausekkeet $|-1-y| < \frac{1}{2}$ ja $|1-y| < \frac{1}{2}$ tulkittuna geometrisesti.

Seuraava lause osoittaa, että jos lukujono suppenee, niin sen raja-arvo on yksikäsitteinen eli että suppenevalla lukujonolla ei voi olla kahta (tai useampaa) raja-arvoa. Ominaisuus on matematiikan toimivuuden kannalta hyvin tärkeä.

Lause 2.2.6: *Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Jos $\lim x_n = a$ ja $\lim x_n = b$, niin $a = b$; toisin sanoen lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistuksen juoni on seuraava: Valitaan epsiloniksi puolet lukujen a ja b välisestä etäisyydestä. Suurilla indeksin arvoilla lukujonon lukujen pitäisi olla alle epsilonin etäisyydellä sekä luvusta a että luvusta b, mikä on mahdotonta, jos $a \neq b$.

Todistus. Tehdään vastaoletus: $a \neq b$. Valitaan $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Koska $a \neq b$, niin $\varepsilon > 0$, joten on olemassa sellaiset $n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^a,$$

ja

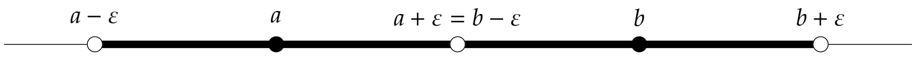
$$|x_n - b| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^b.$$

Kun $n > \max\{n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b\}$, niin luvun x_n pitäisi kuulua välille $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ja välille $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Tämä on mahdotonta, koska $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - b|$, katso Kuva 2.5.

Vaihtoehtoinen tapa saada ristiriita on seuraava. Kun $n > \max\{n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b\}$, niin kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla saamme

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - x_n - b + x_n| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

mikä johtaa ristiriitaan. □



KUVA 2.5. Välit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ja $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ kun $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$.

Jos lukujonon kaikki jäsenet kuuluvat rajoitetulle välille, niin *lukujono on rajoitettu*. Seuraavan tuloksen mukaan suppeneva lukujono on rajoitettu.

LAUSE 2.2.7: *Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Tällöin on olemassa sellainen $M > 0$, että $\{x_n : n \in N_1\} \subset [-M, M]$; toisin sanoen suppeneva lukujono on rajoitettu.*

TODISTUS. Olkoon (x_n) suppeneva lukujono, joka suppenee kohti lukua $x \in \mathbb{R}$. Nyt on olemassa $n' \in \mathbb{N}_0$, jolle $|x_n - x| < 1$ kaikilla $n > n'$. Tällöin

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

kaikilla $n > n'$. Olkoon m suurin luvuista $|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n'}|$. Tällöin kaikilla indeksin n arvoilla

$$|x_n| \leqslant \max\{1 + |x|, m\},$$

joten lukujonon kaikki luvut kuuluvat välille $[-\max\{1 + |x|, m\}, \max\{1 + |x|, m\}]$. Voimme siis valita $M = \max\{1 + |x|, m\}$. □

Seuraavaksi esittelemme suppenevien jonojen yhdistämiseen liittyviä tuloksia.

LAUSE 2.2.8: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x. Olkoon (y_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua y. Tällöin*

(a) *lukujono $(x_n + y_n)$ suppenee ja* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$,
(b) *kaikilla $r \in \mathbb{R}$ lukujono (rx_n) suppenee ja* $\lim_{n\to\infty}(rx_n) = rx$,
(c) *lukujono $(x_n y_n)$ suppenee ja* $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

Lisäksi, jos $y \neq 0$ ja $y_n \neq 0$ kaikilla n, niin

(d) *lukujono $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ suppenee ja* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.

TODISTUS. (a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $n_\varepsilon^x, n_\varepsilon^y \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x - x_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^x,$$

ja

$$|y - y_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^y.$$

Kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

kaikilla $n > \max\{n_\varepsilon^x, n_\varepsilon^y\}$.

Kohdat (b)–(d) ovat tehtävinä 2.2.17–2.2.19. Huomaa, että (d) kohdassa oletuksesta $y \neq 0$ seuraa, että $y_n \neq 0$ kun n on riittävän suuri. Todistetaan tämä. Valitaan, että $\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_1$, että $|y_n - y| < \varepsilon$ kaikilla $n > n_\varepsilon$. Jos $y > 0$, niin saamme $y_n > y - \varepsilon = y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y > 0$ kaikilla $n > n_\varepsilon$.

Jos $y < 0$, niin saamme $y_n < y + \varepsilon = y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y < 0$ kaikilla $n > n_\varepsilon$. Oletusta $y_n \neq 0$ kaikilla n tarvitaan, jotta lukujonon kaikki jäsenet ovat määriteltyjä. □

Seuraava lause osoittaa, että epäyhtälö säilyy lukujonon raja-arvossa. Vaikka lauseen todistus on varsin helppo, niin itse tulos on tärkeä ja sitä tarvitaan useasti.

Lause 2.2.9: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x.*
(a) *Olkoon M reaaliluku, jolla $x_n \leqslant M$ kaikilla indekseillä n. Tällöin pätee $x \leqslant M$.*
(b) *Olkoon m reaaliluku, jolla $x_n \geqslant m$ kaikilla indekseillä n. Tällöin pätee $x \geqslant m$.*

Todistus. (a) Vastaoletuksella. Todistetaan Tehtävässä 2.2.24.
(b) Koska $\lim(x_n) = x$, niin $\lim(-x_n) = -x$ (Lause 2.2.8 (b)). Koska $-x_n \leqslant -m$, niin (a) kohdan perusteella $-x \leqslant -m$, josta väite seuraa. □

Korollaari 2.2.10: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x, ja olkoon (y_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua y.*
(a) *Jos $x_n \leqslant y_n$ kaikilla n, niin $x \leqslant y$.*
(b) *Jos $x_n \geqslant y_n$ kaikilla n, niin $x \geqslant y$.*

Todistus. (a) Tutkitaan lukujonoa $(x_n - y_n)$. Oletuksen perusteella $x_n - y_n \leqslant 0$ kaikilla n. Lauseen 2.2.9 mukaan $\lim(x_n - y_n) \leqslant 0$. Lauseen 2.2.8 perusteella $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = x - y$. Yhdistämällä nämä saamme väitteen.
(b) kohta seuraa (a) kohdasta (kuten Lauseen 2.2.9 todistuksessa) tai se voidaan todistaa suoraan samalla tavalla kuin (a) kohta. □

Jos tiedämme, että lukujono (x_n) suppenee, niin miten käyttäytyy jono, joka muodostuu luvuista $x_1, x_3, x_5, \ldots$. Entä miten käyttäytyy lukujono $x_2, x_4, x_8, \ldots$? Seuraavaksi määrittelemme yleisesti lukujonon osajonon ja esittelemme tuloksen liittyen osajonon suppenemiseen.

Määritelmä 2.2.11: Olkoon (x_n) lukujono ja $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ jono lukuja $n_j \in \mathbb{N}_0$. Määritellään lukujono (y_k) asettamalla $y_j = x_{n_j}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}_0$. Lukujonoa (y_k) sanotaan jonon (x_n) *osajonoksi*.

Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \ldots$, joka on (x_n) arvoilla $x_n = 3 + \frac{1}{n}$. Nyt lukujono (y_n), jolle $y_n = 3 + \frac{1}{2n}$, on lukujonon (x_n) osajono ja sen alkioita ovat $\frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{19}{6}, \ldots$.

Lause 2.2.12: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x. Tällöin sen jokainen osajono suppenee kohti lukua x.*

Todistus. Todistetaan Tehtävässä 2.2.25. □

Lukujonolla voi olla suppeneva osajono vaikka se hajaantuisi. Esimerkiksi, jos $x_n = 1$ kun n on parillinen ja $x_n = -1$ kun n on pariton, niin lukujono (x_n) hajantuu. Lukujonolla on kuitenkin osajonoja, jotka suppenevat kohti lukua -1, ja osajonoja, jotka suppenevat kohti lukua 1. Myöhemmin Lauseessa 2.3.4 osoitetaan, että jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.

Tehtäviä lukuun 2.2.

2.2.13: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Etsi sellainen $k \in \mathbb{N}_1$, että $|x_n - 1| < 10^{-2}$ kaikilla $n > k$.

2.2.14: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = \frac{n}{n^2+1}$. Etsi sellainen $k \in \mathbb{N}_1$, että $|x_n - 1| < 10^{-4}$ kaikilla $n > k$.

2.2.15: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = \frac{2}{2n-1}$. Osoita määritelmän perusteella, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua 0.

2.2.16: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Osoita määritelmän perusteella, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua 2.

2.2.17: Todista Lause 2.2.8(b).

2.2.18: Todista Lause 2.2.8(c).

2.2.19: Todista Lause 2.2.8(d).

2.2.20: Oletetaan, että $B_n \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että lukujono $(\sup B_n - \inf B_n)$ suppenee kohti nollaa.

2.2.21: (SUPPILOPERIAATE eli KURISTUSPERIAATE) Olkoot (x_n), (y_n) ja (z_n) sellaisia lukujono, että $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ kaikilla indekseillä n. Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (z_n) suppenevat ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n$. Osoita, että lukujono (y_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

2.2.22: Olkoon (x_n) suppeneva lukujono, jonka raja-arvo on a. Määritellään lukujono (y_n) asettamalla $y_n = (-1)^n x_n$. Osoita, että jos $a = 0$, niin lukujono (y_n) suppenee. Miten tilanne muuttuu, jos $a \neq 0$?

2.2.23: Olkoon (x_n) lukujono, jolle

$$x_n = \frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)}.$$

Määritä Lauseen 2.2.8 avulla lukujonon raja-arvo.

2.2.24: Todista Lause 2.2.9(a).

2.2.25: Todista Lause 2.2.12.

2.3. Monotoninen lukujono ja rajatta kasvaminen

Tässä luvussa käsittelemme lukujonoja, joissa luvut ovat kasvavassa tai vähenevässä järjestyksessä. Tällaisilla lukujonoilla on aina äärellinen tai ääretön raja-arvo.

MÄÄRITELMÄ 2.3.1: Lukujono (x_n) on *kasvava*, jos $x_n \leqslant x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n. Lukujono on *aidosti kasvava*, jos $x_n < x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n. Lukujono (x_n) on *vähenevä*, jos $x_n \geqslant x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n. Lukujono on *aidosti vähenevä*, jos $x_n > x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n. Lukujono on *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä. Lukujono on *aidosti monotoninen*, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Olkoon (x_n) kasvava ja suppeneva lukujono, jonka raja-arvo on x. Tällöin ajattelemalla lukujonoa $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ saamme Lauseesta 2.2.9, että $x_n \leqslant x$ kaikilla n. Vastaavasti jos (y_n) on vähenevä ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin $y_n \geqslant y$ kaikilla n. Eli monotoninen ja suppeneva lukujono on rajoitettu. Seuraavassa tuloksessa osoitamme, että myös vastakkainen tulos pätee eli monotoninen ja rajoitettu lukujono suppenee.

Lause 2.3.2: (a) *Olkoon (x_n), kasvava lukujono. Jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}$, jolle $x_n \leqslant M$ kaikilla indekseillä n, niin lukujono suppenee. Tällöin* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}_1\} \leqslant M$.

(b) *Olkoon (x_n), vähenevä lukujono. Jos on olemassa luku $m \in \mathbb{R}$, jolle $x_n \geqslant m$ kaikilla indekseillä n, niin lukujono suppenee. Tällöin* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \colon n \in \mathbb{N}_1\} \geqslant m$.

Todistus. (a) Olkoon $\mathbb{N}_1$ lukujonon määrittelyjoukko. Olkoon M reaaliluku, jolle $x_n \leqslant M$ kaikilla indekseillä $n \in \mathbb{N}_1$. Nyt joukko $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}_1\}$ on ylhäältä rajoitettu. Merkitään $s = \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}_1\}$, tällöin $s \leqslant M$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 1.2.8 nojalla lukujonossa on olemassa luku x_{n_ε}, jolle

$$s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant s.$$

Koska lukujono on kasvava, niin

$$s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant s \ \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon,$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$|x_n - s| < \varepsilon \ \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon.$$

Näin ollen $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.

(b) kohta on Tehtävä 2.3.10. □

Lukujonon monotonisuutta voi usein tarkastella vertaamalla kahden peräkkäisen lukujonon alkion erotusta tai osamäärää. Olkoon (x_n) lukujono. Jos esimerkiksi ehto $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ tai $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1$ on voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, niin lukujono (x_n) on kasvava.

Esimerkki 2.3.3: Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = \frac{n}{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että lukujono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

Ratkaisu. Osoitamme aluksi että lukujono on aidosti kasvava. Koska

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{n+1+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

niin $x_n < x_{n+1}$ kaikilla n.

Lisäksi $0 < x_n < 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Lukujono on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Lauseen 2.3.2 nojalla lukujono suppenee ja $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\left\{\frac{n}{n+1} \colon n \in \mathbb{N}_1\right\} \leqslant 1$.

Lopuksi osoitetaan, että $\sup\left\{\frac{n}{n+1} \colon n \in \mathbb{N}_1\right\} = 1$. Kun $n > m$, niin

$$\frac{n}{n+1} > \frac{m}{m+1} = \frac{m+1-1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} > 1 - \frac{1}{m}.$$

Joukon yläraja ei siis voi olla pienempi kuin 1. Koska 1 on joukon yläraja, niin se on supremum. △

Seuraavan lauseen todisti ensimmäisenä Bernard Bolzano vuonna 1817 Bolzanon lauseen avulla, myöhemmin Karl Weierstrass esitti sille vaihtoehtoisen todistuksen. Tämä lause osoittautuu myöhemmin tärkeäksi kun osoitamme että suljetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu (Lause 4.3.2) tai että jokainen suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva (Lause 4.4.5).

LAUSE 2.3.4: (BOLZANON–WEIERSTRASSIN LAUSE) *Olkoon* (x_n) *rajoitettu lukujono eli lukujono, jonka jäsenet kuuluvat rajoitetulle välille. Tällöin lukujonolla on suppeneva osajono.*

$$\underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1-1}, \overset{\downarrow}{x_{n_1}}, \underbrace{x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1}, \overset{\downarrow}{x_{n_2}}, \underbrace{x_{n_2+1}, \dots}_{\{x_n:\, n\geqslant n_2+1\}}}_{\{x_n:\, n\geqslant n_1+1\}}}_{\{x_n:\, n\geqslant 1\}}$$

KUVA 2.6. Lukujonon (x_{n_k}) valinta Bolzanon–Weierstrassin lauseen todistuksessa: luku x_{n_1} on lähellä (enintään $\frac{1}{1}$ etäisyydellä) lukua $\sup\{x_n : n \geqslant 1\}$, luku x_{n_2} on lähellä (enintään $\frac{1}{2}$ etäisyydellä) lukua $\sup\{x_n : n \geqslant n_1 + 1\}$.

TODISTUS. Merkitään $a_k = \sup\{x_n : n \geqslant k\}$. Koska lukujono on rajoitettu, niin $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla indekseillä k. Lisäksi lukujono (a_k) on vähenevä. Lauseen 2.3.2(b) nojalla lukujono (a_k) suppenee. Merkitään $a = \lim_{k\to\infty} a_k$. Huomaa, että a_k ei välttämättä ole lukujonon (x_n) jäsen.

Seuraavaksi valitaan osajono lukujonosta (x_n). Supremumin ominaisuuksien nojalla (Lause 1.2.8) lukujonosta (x_n) löytyy jäsen x_{n_1}, jolle

$$x_{n_1} \geqslant a_1 - \frac{1}{1}.$$

Seuraavaksi lukujonosta (x_n) valitaan jäsen x_{n_2}, jolle $n_2 \geqslant n_1 + 1$ ja

$$x_{n_2} \geqslant a_{n_1+1} - \frac{1}{2}.$$

Oletetaan, että luvut $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ on valittu. Seuraavaksi lukujonosta (x_n) valitaan jäsen $x_{n_{k+1}}$, jolle $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ ja

$$x_{n_{k+1}} \geqslant a_{n_k+1} - \frac{1}{k+1}.$$

Huomaa, että emme käyttäneet kaikkia lukuja a_k. Käytimme vain luvut a_1 ja a_{n_k+1}, $k = 1, 2, \dots$. Koska $a_k \to a$, niin myös $a_{n_k+1} \to a$.

Näin saadulle osajonolle (x_{n_k}) pätee, että

$$a_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} \leqslant x_{n_{k+1}} \leqslant a_{n_k+1}.$$

Koska $a_{n_k+1} \to a$ ja $\frac{1}{k+1} \to 0$ kun $k \to \infty$, niin saamme suppiloperiaatteella (Tehtävä 2.2.21), että $x_{n_k} \to a$ kun $k \to \infty$. □

Määrittelemme seuraavaksi Neperin luvun kasvavien lukujonojen avulla.

Esimerkki 2.3.5: Määritellään jono (x_n) asettamalla

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Osoita, että jono on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu.

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että jono (x_n) on aidosti kasvava tarkastelemalla osamäärää x_{n+1}/x_n. Nyt saamme

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}.\end{aligned}$$

Käytetään seuraavaksi Bernoullin epäyhtälöä (Esimerkki 1.4.5) $(1+x)^m > 1 + mx$ arvoilla $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ ja $m = n + 1$. Saamme

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1,$$

mikä osoittaa, että jono (x_n) on aidosti kasvava.

Osoitetaan seuraavaksi kahdella eri tavalla, että jono on ylhäältä rajoitettu.

Tapa 1. Käyttämällä samanlaista päättelyä kuin yllä voimme osoittaa, että lukujono $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ on aidosti kasvava, katso Tehtävä 2.3.14. Koska

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} < 1,$$

niin käyttämällä tätä ja lukujonon $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ kasvavuutta saamme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

kaikilla n.

Tapa 2. Binomikaavan (Lemman 1.4.9) mukaan

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Arvioidaan summan termiä,

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Käyttäen tätä arviota ja geometrisen sarjan osasummakaavaa (Lause 1.4.10) saamme

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Jono on siis rajoitettu. △

Lauseen 2.3.2 perusteella edellisen tehtävän lukujono suppenee. Sen avulla määrittelemme Neperin luvun e, joka on saanut nimensä skotlantilaisen matemaatikko John Napier (1550–1617) mukaan. Napier tutki logaritmeja ja hän keksi luonnollisen logaritmin vuonna 1618. Napier ei kuitenkaan keksinyt lukua e, vaan sen keksi sveitsiläinen matemaatikko Jacob Bernoulli (1654–1705).

MÄÄRITELMÄ 2.3.6: Lukujonon $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ raja-arvoa kutsutaan *Neperin luvuksi e*.

Koska lukujono $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ on kasvava, niin $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$ kaikilla n. Toisaalta Tehtävistä 2.3.14 ja 2.3.15 saamme $e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ kaikilla n. Saamme näistä arvion luvun e suuruudelle. Esimerkiksi sijoittamalla $n = 10$ saamme $2{,}59 < \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{-10} < 2{,}87$ ja sijoittamalla $n = 10000$ saamme $2{,}7181 < e < 2{,}7185$. Neperin lukua käytetään luonnollisen logaritmin kantalukuna, katso Luku 6.2. Liitteessä C esitämme vaihtoehtoisen tavan määritellä Neperin luku e sarjana, jolloin myös osoitamme luvun e olevan irrationaalinen.

Seuraavaksi siirrymme lukujonoihin, jotka lähestyvät positiivista tai negatiivista ääretöntä.

MÄÄRITELMÄ 2.3.7: Lukujono (x_n) *kasvaa rajatta*, jos jokaista reaalilukua m kohti on olemassa luku sellainen $n_m \in \mathbb{N}_0$, että

$$x_n > m \text{ kaikilla } n > n_m.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \text{ tai } x_n \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Lukujono (x_n) *vähenee rajatta*, jos jokaista reaalilukua m kohti on olemassa luku sellainen $n_m \in \mathbb{N}_0$, että

$$x_n < m \text{ kaikilla } n > n_m.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ tai } x_n \to -\infty \text{ kun } n \to \infty.$$

LEMMA 2.3.8: *Olkoon (x_n) lukujono, joka kasvaa tai vähenee rajatta. Tällöin se hajaantuu.*

Todistus. Käsittelemme vain tapausta että (x_n) on kasvava, toinen tapaus on samanlainen.

Tehdään vastaoletus, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua x. Koska lukujono kasvaa rajatta, on olemassa sellainen luku $m \in \mathbb{N}_0$, että $x_n > x + 1$ kaikilla $n > m$. Tällöin kaikilla $n > m$ pätee $|x_n - x| > 1$, joten lukujono ei suppene kohti lukua x. Lukujono siis hajaantuu. □

Lause 2.3.9: (a) *Olkoon (x_n) kasvava lukujono. Tällöin se joko suppenee tai kasvaa rajatta.*
(b) *Olkoon (x_n) vähenevä lukujono. Tällöin se joko suppenee tai vähenee rajatta.*

Todistus. Tehtävä 2.3.16. □

Tehtäviä lukuun 2.3.

2.3.10: Tässä esimerkissä Lauseen 2.3.2(b) todistetaan kahdella eri tavalla.
(a) Lue lauseen (a) kohdan todistus ja muuta todistus lauseen (b) kohdan tapaukseen.
(b) Todista lauseen (b) kohta käyttäen lauseen (a) kohtaa.

2.3.11: Osoita, että lukujono $\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)$ on vähenevä ja määritä sen raja-arvo.

2.3.12: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_1 = 3$ ja $x_n = \frac{n}{n-1}$ kun $n \geqslant 2$. Osoita, että lukujono (x_n) on vähenevä ja määritä sen raja-arvo.

2.3.13: Bolzanon–Weierstrassin lauseen 2.3.4 todistuksessa käytettiin joukkojen $\{x_n : n \geqslant k\}$ supremumeja. Muuta todistusta niin että se käyttää samojen joukkojen infimumeja.

2.3.14: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että lukujono $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$ on kasvava kaikilla $n > |x|$.

2.3.15: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että lukujonon $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ raja-arvo on $\frac{1}{e}$.

2.3.16: Todista Lause 2.3.9.

2.3.17: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = (\frac{1}{n} - 1)^n$. Osoita, että lukujono (x_n) hajaantuu.

2.4. Cauchyn yleinen suppenemisehto ∗

Tarkastelemme tässä luvussa tuloksia, joiden avulla voimme tutkia lukujonon käyttäytymistä. Seuraava lause antaa meille mahdollisuuden osoittaa helposti, että lukujono hajaantuu.

Lause 2.4.1: *Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Tällöin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että kun $n > n_\varepsilon$, niin*

$$|x_n - x_{n+k}| < \varepsilon$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$.

Todistus. Merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska lukujono (x_n) suppenee, niin on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Olkoon $n > n_\varepsilon$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$ saadaan kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla

$$|x_n - x_{n+k}| = |x_n - a + a - x_{n+k}| \leqslant |x_n - a| + |a - x_{n+k}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \qquad \square$$

Esimerkki 2.4.2: Osoita, että lukujono $1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ hajaantuu.

Ratkaisu. Lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksen itseisarvo on aina yksi tai kaksi. Lauseen 2.4.1 ehdot eivät toteudu, kun valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ja $k = 1$. Siis jono hajaantuu. △

Lemma 2.4.3: *Olkoon* $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}_1$, *välejä, joille*

$$\left[a_{n+1}, b_{n+1}\right] \subset \left[a_n, b_n\right] \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}_1$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Tällöin leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *sisältää täsmälleen yhden luvun, toisin sanoen on olemassa täsmälleen yksi luku, joka kuuluu kaikkiin väleihin* $[a_n, b_n]$.

Lause ei päde avoimille väleille. Esimerkiksi välit $(0, \frac{1}{n})$, kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, ovat sisäkkäisiä ja $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} - 0) = 0$, mutta $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \emptyset$.

Todistus. Lukujono (a_n) on kasvava ja lukujono (b_n) on vähenevä, ja lisäksi $a_n \leqslant b_k$ kaikilla $n, k \in \mathbb{N}_1$. Erityisesti siis pätee, että $a_n \leqslant b_1$ kaikilla n. Lauseen 2.3.2 nojalla lukujono (a_n) suppenee, olkoon a sen raja-arvo. Vastaavalla tavalla saadaan, että lukujono (b_n) suppenee, olkoon b sen raja-arvo. Koska (a_n) on kasvava, niin $a \geqslant a_n$ kaikilla indekseillä n, ja koska (b_n) on vähenevä, niin $b \leqslant b_n$ kaikilla indekseillä n. Koska $a_n \leqslant b_n$ kaikilla n, niin $a \leqslant b$ (Korollaari 2.2.10). Tällöin pätee

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n \to 0,$$

joten $a = b$.

Koska $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ kaikilla n, niin $\{a\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Olkoon $x \neq a$. Koska $b_n - a_n \to 0$ ja $a \in [a_n, b_n]$, niin $x \notin [a_n, b_n]$, kun n on riittävän suuri. Saamme $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. □

Cauchyn yleinen suppenemisehto on ranskalaiselta Augustin-Louis Cauchylta (1789–1857). Tsekkiläinen Bernhard Bolzano (1781-1848) oli tehnyt saman havainnon, mutta hänen tuotanto jäi pitkään laajemmalti tuntemattomaksi.

Lause 2.4.4: (Cauchyn yleinen suppenemisehto) *Lukujono* (x_n) *suppenee, jos ja vain jos jokaista lukua* $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa luku* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ *siten, että*

$$|x_n - x_{n+k}| < \varepsilon \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon \text{ ja kaikilla } k \in \mathbb{N}_0.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että lukujono (x_n) suppenee. Ehto seuraa Lauseesta 2.4.1.

Oletetaan sitten, että lauseen ehto on voimassa, ja osoitetaan, että lukujono suppenee. Valitaan $\varepsilon = 1$. Tällöin ehdon mukaan on olemassa sellainen luku n_1, että $|x_n - x_{n+k}| < 1$ kaikilla $n > n_1$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Saamme $x_n \in (x_{n_1+1} - 1, x_{n_1+1} + 1)$ kaikilla $n > n_1$. Lisäksi joukossa $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|\}$ on suurin alkio, jota merkitään m. Kaikki lukujonon (x_n) luvut kuuluvat siis välille $(-|x_{n_1+1}| - 1 - m, |x_{n_1+1}| + 1 + m)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}, & p_1 &= \inf\{x_1, x_2, x_3, \ldots\};\\
s_2 &= \sup\{x_2, x_3, x_4 \ldots\}, & p_2 &= \inf\{x_2, x_3, x_4 \ldots\};\\
&\vdots & &\vdots\\
s_n &= \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}, & p_n &= \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\};\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Koska lukujonon (x_n) kaikki luvut kuuluvat rajoitetulle välille, kaikki edellä määritellyt supremumit ja infimumit ovat reaalilukuja. Tällöin lukujono (s_n) on vähenevä ja lukujono (p_n) on kasvava. Lisäksi kaikilla indekseillä n pätee $s_n \geqslant p_n$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\lim_{n\to 0}(s_n - p_n) = 0$. Oletuksen mukaan on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_1$ siten, että kaikilla $n > n_\varepsilon$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$ pätee

$$|x_n - x_{n+k}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Lauseen 1.2.8 perusteella on olemassa lukujonon jäsenet x_{k_n} ja $x_{k_n'}$, joille pätee

$$|s_n - x_{k_n}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \text{ ja } |p_n - x_{k_n'}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Tällöin saadaan kolmioepäyhtälöllä (Lause 2.1.2)

$$\begin{aligned}
|s_n - p_n| &= |s_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x_{k_n'} + x_{k_n'} - p_n|\\
&\leqslant |s_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x_{k_n'}| + |x_{k_n'} - p_n| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

kaikille $n > n_\varepsilon$, joten $\lim_{n\to\infty}(s_n - p_n) = 0$.

Lemman 2.4.3 mukaan väleillä $[p_n, s_n]$ on täsmälleen yksi yhteinen luku, olkoon tämä luku x. Osoitetaan, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua x. Koska $x, x_k \in [p_n, s_n]$ kaikilla $k > n$, niin $|x - x_k| \leqslant s_n - p_n$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty}(s_n - p_n) = 0$, niin on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_1$ siten, että $0 \leqslant s_n - p_n < \varepsilon$ kaikilla $n > n_\varepsilon$. Tällöin $|x - x_k| \leqslant s_n - p_n < \varepsilon$ kaikilla $k > n > n_\varepsilon$ eli kaikilla $k > n_\varepsilon + 1$. $\square$

Tehtäviä lukuun 2.4.

2.4.5: Osoita, että lukujono $(2, 2, 5, 2, 2, 5, \ldots)$ hajaantuu.

2.4.6: Tutki, suppeneeko lukujono $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \ldots)$.

2.4.7: Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. Osoita, että lukujono hajaantuu. Sisältääkö lukujono suppenevan osajonon?

2.4.8: Olkoon (x_n) lukujono, joka toteuttaa ehdon $|x_n - x_{n+1}| < 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Osoita Cauchyn yleisen suppenemisehdon avulla, että lukujono (x_n) suppenee.

LIITE A

Joukko-opin merkintöjä

Tarkastelemme matemaattiseen joukkoon liittyviä käsitteitä. Emme kuitenkaan määrittele käsitettä *joukko*, vaan luotamme siihen, että lukijalla on intuitiivinen käsitys joukosta. Joukko koostuu alkioista eli joukon jäsenistä. Joukon jäsenet voivat itsekin olla joukkoja. Vaadimme, että aina on yksikäsitteisesti mahdollista selvittää, onko annettu alkio joukon jäsen vai ei. Eräs mahdollisuus joukon esittämiseen on luetella sen alkiot, esimerkiksi

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Joukot A ja B ovat samoja, merkitään $A = B$, jos joukoissa on täsmälleen samat alkiot. Jos joukot A ja B eivät ole samoja, niin merkitään $A \neq B$. *Tyhjä joukko*, merkitään $\emptyset$, on joukko, jossa ei ole yhtään alkiota. Kun alkio a kuuluu joukkoon A, niin merkitään $a \in A$. Jos alkio a ei kuulu joukkoon A, merkitään $a \notin A$. Joukko A on joukon B *osajoukko*, merkitään $A \subset B$, jos jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio. Joukko A on joukon B *aito osajoukko*, merkitään $A \subsetneq B$, jos $A \subset B$ ja $A \neq B$. Huomaa, että joukko A on itsensä osajoukko mutta se ei ole itsensä aito osajoukko.

Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat ainakin toiseen joukoista A ja B, eli

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

Joukkojen A ja B *leikkaus* $A \cap B$ on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B, eli

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

Joukkojen A ja B *(joukko)erotus* $A \setminus B$ on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A, mutta eivät kuulu joukkoon B, eli

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Huomaa, että joukoille A ja B on aina voimassa $A \cup B = B \cup A$ ja $A \cap B = B \cap A$. Sen sijaan yleensä ei ole $A \setminus B = B \setminus A$.

Jos E on *perusjoukko* eli joukko, johon rajoitamme tarkastelumme, niin joukon $A \subset E$ *komplementti* $\complement A$ (joukon E suhteen) on niiden joukon E alkioiden joukko, jotka eivät kuulu joukkoon A, eli

$$\complement A = E \setminus A.$$

Tässä kirjassa perusjoukko on luvussa 1.1 esiteltävä reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ellei toisin mainita.

Reaaliluvut ja niiden perusominaisuudet esitellään luvuissa 1.1 ja 1.2. Reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ lisäksi muita reaalianalyysin kannalta tärkeitä lukujoukkoja ovat

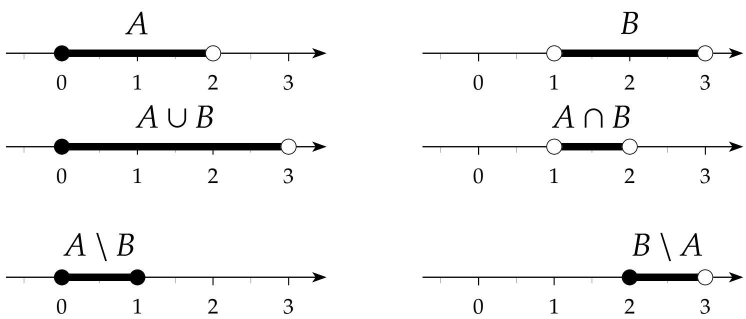
$\mathbb{N}_1$ luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{N}_0$ ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{Z}$ kokonaislukujen joukko $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko $\{z/n \colon z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_1\}$.

Toisinaan joukkoa $\mathbb{N}_0$ kutsutaan luonnollisten lukujen joukoksi ja joukkoa $\mathbb{N}_1$ positiivisten kokonaislukujen joukoksi. Me emme käytä tätä terminologiaa. Käytämme pääsääntöisesti merkintöjä $\mathbb{N}_0$ ja $\mathbb{N}_1$, koska merkinnän alaindeksi kertoo joukon pienimmän alkion. Tämä estää sekaantumisen vaaraa.

Esimerkki A.1. Olkoot $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{3, 4, 5\}$. Tällöin $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$ ja $B \setminus A = \{4, 5\}$. Lisäksi kaikki joukon A osajoukot ovat $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ ja A.

Esimerkki A.2. Tarkastellaan välejä $A = [0, 2)$ ja $B = (1, 3)$, jotka ovat myös joukkoja. Nyt saamme (katso Kuva A.1)

$$A \cup B = [0, 3), \quad A \cap B = (1, 2), \quad A \setminus B = [0, 1], \quad B \setminus A = [2, 3).$$



Kuva A.1. Joukot A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ ja $B \setminus A$.

Kahden joukon yhdisteen ja leikkauksen määritelmät yleistyvät numeroituvalle joukkoperheelle helposti. Kun $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ovat joukkoja, niin niiden yhdiste on

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \colon x \in A_k \text{ jollakin } k \in \mathbb{N}_1\}$$

ja leikkaus on

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \colon x \in A_k \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}_1\}.$$

Esimerkki A.3. Olkoot $A_k = \{x \in \mathbb{R} \colon \frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 2 + \frac{1}{k}\} = [\frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k}]$, $k \in \mathbb{N}_1$. Tällöin

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x \leqslant 3\} = (0, 3]$$

ja

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leqslant x \leqslant 2\} = [1, 2].$$

Kirjallisuutta

[1] Robert A. Adams: Calculus: A Complete Course, 6th edition, Pearson Education Canada, Toronto, Canada, 2006.

[2] Glen D. Anderson, Mavina K. Vamanamurthy, Matti K. Vuorinen: Conformal invariants, inequalities and quasiconformal mappings, J. Wiley, 1997.

[3] Glen D. Anderson, Mavina K. Vamanamurthy, Matti K. Vuorinen: Monotonicity rules in calculus, Amer. Math. Monthly 113:9 (2006), 805–816.

[4] Tom M. Apostol: Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.

[5] Tom M. Apostol: Calculus, Volume I, 1st Edition, Blaisdell, New York, 1961.

[6] Carl B. Boyer: Tieteiden kuningatar I ja II - Matematiikan historia, Art House Oy, 2000.

[7] Charles G. Denlinger: Elements of Real Analysis, Jones and Barlett Publisher, 2011.

[8] Peter Duren: Invitation to classical analysis. Pure and Applied Undergraduate Texts, 17. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[9] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted: Counterexamples in Analysis, Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.

[10] Ritva Hurri-Syrjänen: Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1, luentomuistiinpanot, syksy 1999, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.

[11] Magdalena Hykšová: Bolzano's inheritance research in Bohemia. Mathematics throughout the ages (Holbaek, 1999/Brno, 2000), 67–91, Děj. Mat./Hist. Math., 17, Prometheus, Prague, 2001.

[12] Jouni Kankaanpää: Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2, luentomuistiinpanot, kevät 2001, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.

[13] Tero Kilpeläinen: Analyysi 1, luentomuistiinpanoja vuosilta 2000–2002, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.

[14] Tero Kilpeläinen: Analyysi 2, muistiinpanoja vuosilta 2001 ja 2003, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.

[15] Tero Kilpeläinen: Analyysi 3, luentomuistiinpanoja syksyltä 2005, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.

[16] Matti Lehtinen: Matematiikan historia, Matematiikkalehti Solmu, http://solmu.math.helsinki.fi.

[17] The MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews Scotland, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/.

[18] Olli Martio, Jukka Sarvas: Tavalliset differentiaaliyhtälöt, 2. painos, Gaudeamus, 1982.

[19] John McCarthy: An everywhere continuous nowhere differentiable function, Amer. Math. Monthly 60, (1953), 709.

[20] Jorma Merikoski, Markku Halmetoja, Timo Tossavainen: Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan, WSOY, 2004.

[21] Lauri Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1, 1.–3. painos, Kirjayhtymä, Helsinki, 1981.

[22] Lauri Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 2, 1.–3. painos, Kirjayhtymä, Helsinki, 1986.

[23] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson: Convex functions and their applications. A contemporary approach. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 23. Springer, New York, 2006.

[24] Ivan Niven: Irrational numbers. The Carus Mathematical Monographs, No. 11. The Mathematical Association of America. Distributed by John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1956.

[25] John M. H. Olmsted: Advanced calculus; Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1961.
[26] Walter Rudin: Principles of Mathematical Analysis, 2nd Edition, McGraw-Hill, Tokyo, 1964.
[27] Jussi Väisälä: Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1, luentomuistiinpanot, 1985, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.
[28] Jussi Väisälä: Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2, luentomuistiinpanot, 1978, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.
[29] Jussi Väisälä: Topologia I, 2. korjattu painos, Limes ry, Helsinki, 2002.

Hakemisto

Merkintöjä

$\{a, b, c\}$	joukko, jonka alkiot ovat a, b ja c
$\mathbb{N}_1$	luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	kokonaislukujen joukko $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	rationaalilukujen joukko $\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko, kts. Luku 1.1
$\emptyset$	tyhjä joukko
$x \in A$	alkio x kuuluu joukkoon A
$x \notin A$	alkio x ei kuulu joukkoon A
$A \subset B$	joukko A on joukon B osajoukko; jos $x \in A$, niin $x \in B$
$A = B$	joukot A ja B ovat samat; $A \subset B$ ja $B \subset A$
$A \neq B$	joukot A ja B eivät ole samat
$A \cup B$	joukkojen A ja B yhdiste $\{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}$
$A \cap B$	joukkojen A ja B leikkaus $\{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$
$A \setminus B$	joukkojen A ja B erotus $\{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$
(a, b)	avoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b]$	suljettu väli $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
$(a, b]$	puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
$[a, b)$	puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
$\min A$	reaalilukujoukon A minimi eli pienin luku
$\max A$	reaalilukujoukon A maksimi eli suurin luku
$\inf A$	reaalilukujoukon A infimum eli suurin alaraja, kts. Määritelmä 1.2.2
$\sup A$	reaalilukujoukon A supremum eli pienin yläraja, kts. Määritelmä 1.2.3
$\lvert x\rvert$	reaaliluvun x itseisarvo, kts. Määritelmä 2.1.1
$n!$	luvun $n \in \mathbb{N}_0$ kertoma $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$
$f : A \to B$	funktio f joukosta A joukkoon B, kts. Määritelmä 1.5.1
$g \circ f$	yhdistetty funktio; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, kts. Määritelmä 1.5.10
$\mathrm{D}_x f$, f'	funktion f derivaattafunktio, kts. Määritelmät 5.1.1 ja 5.1.13
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$	funktion f Riemannin integraali välillä $[a, b]$, kts. Määritelmä 7.1.6
$\displaystyle\Big/_{a}^{b} f(x)$	sijoitus $f(b) - f(a)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$	reaalilukujen $x_1, \ldots, x_n$ summa
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$	reaalilukujen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ muodostama sarja, kts. Määritelmä 13.1.1