

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2016

Tehtävät 6 A ja L

17.10. alkavalle viikolle

Nämä ovat tämän kurssin viimeiset tehtävät. Seuraavan periodin kurssilla *differentiaalilaskenta* jatkamme raja-arvojen opiskelua tästä eteenpäin. Vielä vaikealta tuntuvat asiat saavat siellä useita tilaisuuksia selventyä. Lisäksi pääsemme näkemään sitä, mitä hyötyä täsmällisistä määritelmistämme on.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5 Tehtävät A1 - A4 mukailivat vanhaa koetta. Tehtävässä A5 harjoitellaan funktion raja-arvon määritelmää.

A1 Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{2n^2 + 3}.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvosta sekä lukujonojen raja-arvoja koskevia lauseita. Perustele vastauksesi huolellisesti!

A2 Osoita lukujonon rajatta kasvamisen määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{3n + 1} = \infty.$$

A3 Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{4}{5}.$$

A4 Tarkastellaan lukujonoa (x_n) , missä $x_1 = 2$ ja kaikilla $n = 1, 2, \dots$ pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1).$$

(a) Osoita, että jono on vähenevä (eli laskeva) ja, että 1 on sen alaraja. (Kannattaa huomata, että $\sqrt{a} < a$ kun $1 < a$.)

(b) Osoita, että jono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

A5 Osoita raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella, että yhtälöllä $f(x) = x^2 + 3x + 4$ määritelty funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva kohdassa $x = 1$. (Muista, että jatkuvuus tarkoittaa sitä, että funktion arvo on sen raja-arvo.)

Loppuviikon tehtävät Tällä kertaa ei ole loppuviikon tehtäviä.