MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2016

Tehtävät 6 A ja L
10.10. alkavalle viikolle

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5 Jatkamme lukujonojen raja-arvojen ja suppien ja infien parissa.

A1 Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-5}{n^2+3}=\infty.$$

A2 Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-n^3}{n^2-3}=-\infty.$$

A3 Määritellään lukujono (x_n) ehdoilla $x_1=3$ ja
$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\sqrt{x_n}).$$

(a) Osoita, että jono suppenee osoittamalla, että se on alhaalta rajoitettu ja laskeva (vähenevä).
(b) Määritä jonon raja-arvo.

A4 Määritä $\inf A$ ja $\sup A$, missä
$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<2 \text{ tai } 3<x<4\}.$$

A5 Oletetaan, että $x_n\to 3$ ja $y_n\to\infty$ kun $n\to\infty$. Osoita, että $x_n+y_n\to\infty$ kun $n\to\infty$. Huomaa, että kurssilla ei ole lausetta, jota voisi tässä soveltaa. Tehtävässä täytyy työskennellä siksi määritelmien pohjalta.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5 Alamme maistella funtkion raja-avoa. Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus ovat sovelluksia raja-arvon käsitteestä.

Funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos $f(x) \to f(x_0)$ kun $x \to x_0$.

Funktio f on derivoituva kohdassa x_0 ja sen derivaatta on reaaliluku A, jos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A$$

kun $x \to x_0$.

L1 Oletetaan, että A ja B ovat epätyhjiä ylhäältä rajoitettuja reaalilukujoukkoja. Merkitään $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Osoita, että

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

L2 Tarkastellaan lukujonoa (x_n). Oletetaan, että kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ pätee $x_n > 0$. Osoita tarkasti, että seuraavat ovat yhtäpitäviä.

(a) $x_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

(b) $\frac{1}{x_n} \to \infty$ kun $n \to \infty$.

L3 Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\frac{x+3}{x+5} \to \frac{2}{3}$$

kun $x \to 1$.

L4 Todista funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmän avulla, että ehdolla $f(x) = |x|$ määritelty funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva jokaisessa kohdassa $x_0 \in \mathbb{R}$. Tarkastele erikseen tapauksia $x_0 < 0$, $x_0 = 0$ ja $x_0 > 0$.

L5 Oletetaan, että funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ehdon $|g(x)| \leq 3$. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^2 g(x)$. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x_0 = 0$.