MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2016

Tehtävät 4 A ja L
26.9. alkavalle viikolle

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5 Harjoitellaan lukujonon raja-arvon määritelmää.

A1 Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

on tosi.

A2 Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$$

on tosi.

A3 Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$$

on epätosi.

A4 Onko väite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1}) = 0$$

tosi? Vastaa lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella. (Tehtävässä saa käyttää tietoa, että jokaisella $x \geq 0$ on neliöjuuri ja että epänegatiivisten reaalilukujen joukossa pätee: suuremman luvun neliöjuuri on suurempi. Mitenköhän nämä voisi muuten perustella?)

A5 Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (y_n) toteuttavat seuraavat ehdot:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ja

$$\text{kaikilla } n \in \mathbb{N}_1 \text{ pätee } |y_n| \leq 5.$$

Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5 Tutustutaan lukujonojen raja-arvojen ominaisuuksiin. Näissä tehtävissä saa käyttää kurssin (kirjamme) esittämiä lukujonojen raja-arvojen ominaisuuksia. Muista myös, että merkintä

$$x_n \to a \text{ kun } n \to \infty$$

tarkoittaa täysin samaa kuin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Ts. merkinnät ovat toistensa "synonyymejä".

L1 Selvitä kurssin lukujonojen raja-arvoja koskevien tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1}.$$

L2 Tarkastellaan lukujonoja (x_n) ja (y_n).

(a) Oletetaan, että molemmat hajaantuvat. Mitä tiedetään jonon (x_n+y_n) suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(b) Oletetaan, että jono (x_n) suppenee ja jono (y_n) hajaantuu. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(c) Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, ja että jono (y_n) hajaantuu. Oletetaan lisäksi, että $x_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

L3 Etsi kirjasta Bernoullin epäyhtälö ja selvitä, mitä se kertoo meille. Osoita sitten Bernoullin epäyhtälön avulla tarkasti, että

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Bernoullin epäyhtälöä sovellettaessa kannattaa ajatella, että

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2} - 1)}.$$

L4 Lukujonon raja-arvon määritelmässä on ”kvanttoririmpsu”

$$\forall \epsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}_1\, \forall n > K.$$

Yksi tapa saada tuntumaan tähän on miettiä muita rimpsuja. Selvitä mitä seuraavat kertovat lukujonosta (x_n).
(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0\, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$,
(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \exists \varepsilon > 0\, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$.

L5 Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, ja että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Tätä tietoa tarvitaan todistettaessa lukujonojen raja-arvojen yhteyttä jakolaskuun. Voit esimerkiksi tarkastella erikseen tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$.