MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2016

Tehtävät 5 A ja L
3.10. alkavalle viikolle

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5 Harjoitellaan lukujonon raja-arvojen ominaisuuksia.

A1 Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}.$$

Perustele tuloksesi tarkasti. Huomaa lauseen 2.2.8. "jos ..., niin ..." -rakenne. Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojojen ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista.

A2 Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^3+1}.$$

Perustele tuloksesi tarkasti. Huomaa lauseen 2.2.8. "jos ..., niin ..." -rakenne. Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojojen ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista.

A3 Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$.
(a) Määritellään y_n yhtälöllä $y_n = x_{n^2}$. Osoita että $y_n \to a$ kun $n \to \infty$.
(b) Määritellään z_n yhtälöillä $z_0 = 42$ ja $z_n = x_{n-1}$ kun $n > 1$. Osoita että $z_n \to a$ kun $n \to \infty$.

A4 Tarkastellaan lukujonoa (x_n), joka on määritelty ehdoilla $x_1 = 3$ ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

kun $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan tunnetuksi, että on olemassa reaaliluku a, jolle pätee, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$. Määritä luvun a ainoa mahdollinen arvo. Seuraako tehtävän päättelystä, että olemme samalla todistaneet, että jono (x_n) suppenee?

A5 Määritellään, että lukujono (x_n) kasvaa rajatta, jos kaikilla reaaliluvuilla M on olemassa kynnys $K \in \mathbb{N}_1$, jolle kaikilla $n > K$ pätee $x_n > M$. Tätä merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

ja myös

$$x_n \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Osoita, että

$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Vihje: Arvioi lukujonon jäsentä $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ alaspäin sellaiseksi lausekkeeksi, josta on helppo tietää kuinka suuri indeksin n riittää olla jotta $x_n > M$.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5 Jatketaan raja-arvojen opiskelua. Uutena asiana mukaan tulevat supremumin ja infimumin käsitteet ja niiden yhteys raja-arvojen olemassaoloon.

L1 Oletetaan, että $x_n > 0$ kaikilla n ja että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$. Osoita, että

$$\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}.$$

L2 Oletetaan tunnetuksi, että

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

kun $n \to \infty$. Selvitä tämän ja edellisen tehtävän perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Edellisen tehtävän tuloksesta on apua!

L3 Osoita, että $n - \sqrt{n} \to \infty$ kun $n \to \infty$.

L4 Tarkastellaan reaalilukujen joukon osajoukkoa

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}.$$

Osoita, että on olemassa $a = \sup A$ ja että $a^2 = 5$. Tehtävässä osoitetaan siis, että luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo seuraa reaalilukujen aksiomeista.

L5 Osoita, että tehtävän A4 lukujono suppenee.