MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2016

Tehtävät 3 A ja L
19.9. alkavalle viikolle

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5 Harjoitellaan itseisarvoja.

A1 Todista määritelmään nojautuen seuraavat itseisarvon ominaisuudet:
(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|xy| = |x||y|$.

A2 Selvitä itseisarvolemman avulla tarkasti
(a) minkä välin muodostavat ne reaaliluvut x, joille pätee $|x - 42| < 7^{-7777}$,
(b) minkä joukon muodostavat ne reaaliluvut x, joille pätee $0 < |x - 42| < 7^{-7777}$.

A3 Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$\left| \frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{a}{n}.$$

A4 Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$\left| \frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{a}{n}.$$

A5 Merkitään $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Tarkastellaan niitä reaalilukuja x, joille pätee $|x - 1| < 1$. Etsi positiivinen reaaliluku K, jolle kaikilla tarkasteltavilla x pätee

$$|f(x) - f(1)| \leq K|x - 1|.$$

Voiko tehtävässä korvata merkinnän $\leq$ merkinnällä $<$?

Vihjeitä: Tehtävässä on terkoitus harjoitella kolmioepäyhtälön soveltamista. Tätä varten kannattaa esittää erotus $f(x) - f(1)$ muodossa $(x^3 - 1) +$

$2(x^2-1)+3(x-1)$. Lisäksi kannattaa soveltaa tietoa $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5 Tutustutaan lukujonon raja-arvon määritelmään.

L1 Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+5}=1$$

on tosi.

L2 Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+5}=1$$

on tosi.

L3 Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+5}=2$$

on epätosi.

L4 Määritellään lukujono (x_n) asettamalla

$$\frac{n+1}{n+5}$$

kun n on parillinen ja

$$\frac{n^2+1}{n^2+5}$$

kun n on pariton. Suppeneeko jono.

L5 Oletetaan, että lukujono (y_n) toteuttaa ehdon $|y_n|\leq 3$ kaikilla n. Määritellään lukujono (x_n) asettamalla kaikille n

$$x_n=\frac{y_n}{n}.$$

Osoita, että jono (x_n) suppenee.