HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Oletetaan, että A ja B ovat epätyhjiä ylhäältä rajoitettuja reaalilukujoukkoja. Merkitään $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Osoita, että

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

Ratkaisu:

Merkitään C:llä tehtävänannossa mainittua joukkoa, jonka supremumia nyt halutaan tarkastella, eli $C = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$. Halutaan siis osoittaa, että $a + b = \sup C$.

Joukot A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja, joten joukko C on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu. Siis on olemassa $\sup C$. Supremumin määritelmän nojalla kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq \sup A = a$ ja kaikilla $y \in B$ pätee $y \leq \sup B = b$. Täten summalle $x + y$ pätee

$$x + y \leq \sup A + \sup B = a + b,$$

eli $a + b$ on jokin yläraja joukolle C. Supremumin määritelmän mukaan $a + b$ on joukon C supremum, jos $a + b$ on myös pienin yläraja.

Oletetaan, että $c = \sup C = a + b - h$ jollakin $h > 0$. Valitaan $x_h \in A$ ja $y_h \in B$ siten, että $x_h > a - \frac{h}{2}$ ja $y_h > b - \frac{h}{2}$. Nyt $x_h + y_h \in C$ ja

$$x_h + y_h > a - \frac{h}{2} + b - \frac{h}{2} = a + b - h = c,$$

joten mikään lukua $a + b$ pienempi luku ei voi olla joukon C yläraja, eli oletus $\sup C = a + b - h$ ei voi pitää paikkansa. Tästä ja tiedosta, että $a + b$ on joukon C yläraja, seuraa $\sup C = a + b$.

L2. Tarkastellaan lukujonoa (x_n). Oletetaan, että kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ pätee $x_n > 0$. Osoita tarkasti, että seuraavat ovat yhtäpitäviä.

(a) $x_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

(b) $\frac{1}{x_n} \to \infty$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu:

(1) *Oletetaan ensin, että a-kohta pätee, ja todistetaan, että tällöin myös b-kohta pätee:*

Pohdintaa: Halutaan siis todistaa, että $\frac{1}{x_n} \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tämä tarkoittaa määritelmän mukaan, että jokaista reaalilukua M kohti on olemassa positiivinen kokonaisluku K, jolla $\frac{1}{x_n} > M$, kun $n > K$. Oletetaan siis, että M on jokin reaaliluku, ja osoitetaan, että halutunlainen positiivinen kokonaisluku K on olemassa.

Nyt oletetaan siis, että a-kohta pätee, eli että $x_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Lukujonon raja-arvon määritelmän mukaan tämä tarkoittaa, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa positiivinen kokonaisluku K, jolla

$$|x_n - 0| < \varepsilon, \text{ kun } n > K.$$

Tarkastellaan nyt määritelmän ytimessä olevaa epäyhtälöä $|x_n - 0| < \varepsilon$. Se on yhtäpitävästi $|x_n| < \varepsilon$ ja koska tehtävänannossa on sanottu, että $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, ja positiivisen luvun itseisarvo on luku itse, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa eli saadaan $x_n < \varepsilon$.

Nyt koska $x_n > 0$ ja $\varepsilon > 0$, niin edellä saatu epäyhtälö $x_n < \varepsilon$ voidaan jakaa puolittain luvuilla x_n ja ε ja epäyhtälön suunta säilyy. Tällöin saadaan

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{x_n} \quad \text{eli} \quad \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tämä on jo hyvin lähellä haluttua epäyhtälöä $\frac{1}{x_n} > M$. Nyt kun valitaan

$$\varepsilon = \frac{1}{\max\{M, 1\}},$$

niin edellisen ε:ia koskevan epäyhtälön ja siihen liittyvän raja-arvon määritelmän nojalla saadaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku K, jolla

$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\max\{M,1\}}} = \max\{M, 1\} \geq M, \text{ kun } n > K.$$

Siis on olemassa positiivinen kokonaisluku K, jolla $\frac{1}{x_n} > M$, kun $n > K$, ja tämä oli se, mitä haluttiin todistaa. (Huomaa, ettei voitu valita vain $\varepsilon = \frac{1}{M}$, koska M voi olla negatiivinen tai nolla, ja raja-arvon määritelmän mukaan luvun ε on oltava aina positiivinen.)

Todistus: Olkoon M jokin reaaliluku. Valitaan luvuksi K sellainen positiivinen kokonaisluku, jolle pätee $|x_n - 0| < \frac{1}{\max\{M,1\}}$, kun $n > K$. Oletetaan, että $n > K$. Edellisen pohdinnan nojalla nyt pätee $\frac{1}{x_n} > M$. Siis $\frac{1}{x_n} \to \infty$, kun $n \to \infty$.

(2) *Oletetaan nyt, että b-kohta pätee, ja todistetaan, että tällöin myös a-kohta pätee:*

Pohdintaa: Halutaan siis todistaa, että $x_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämä tarkoittaa lukujonon määritelmän mukaan, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa positiivinen kokonaisluku K, jolla $|x_n - 0| < \varepsilon$, kun $n > K$. Oletetaan siis, että $\varepsilon > 0$ on jokin luku, ja osoitetaan, että halutunlainen positiivinen kokonaisluku K on olemassa.

Nyt oletetaan siis, että b-kohta pätee, eli että $\frac{1}{x_n} \to \infty$, kun $n \to \infty$. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa, että jokaista reaalilukua M kohti on olemassa positiivinen luku K, jolla

$$\frac{1}{x_n} > M, \text{ kun } n > K.$$

Toisaalta 1. kohdassa osoitettiin, että todistettava epäyhtälö $|x_n - 0| < \varepsilon$ on yhtäpitävä epäyhtälön $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$ kanssa ja tämä muistuttaa jälleen läheisesti aiemman virkkeen epäyhtälöä $\frac{1}{x_n} > M$.

Nyt kun valitaan $M = \frac{1}{\varepsilon}$, niin oletuksesta saadaankin, että on olemassa positiivinen luku K, jolla

$$\frac{1}{x_n} > M = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ kun } n > K.$$

Siis toisin sanoen on olemassa positiivinen luku K, jolla

$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ kun } n > K.$$

Tämän todistettiin 1. kohdassa olevan olevan yhtäpitävä sen kanssa, että on olemassa positiivinen kokonaisluku K, jolla $|x_n - 0| < \varepsilon$, kun $n > K$, ja tämä oli se, mitä haluttiin todistaa.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan luvuksi K sellainen positiivinen kokonaisluku, jolle pätee $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$, kun $n > K$. Oletetaan, että $n > K$. Edellisen pohdinnan nojalla nyt pätee $|x_n - 0| < \varepsilon$. Siis raja-arvon määritelmän nojalla $x_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

Nyt ollaan siis osoitettu, että a-kohdasta seuraa b-kohta ja että b-kohdasta seuraa a-kohta. Tämä tarkoittaa, että a- ja b-kohta ovat yhtäpitäviä.

L3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\frac{x+3}{x+5} \to \frac{2}{3}$$

kun $x \to 1$.

Ratkaisu:

Pohdintaa: Funktion raja-arvon määritelmän perusteella "$\frac{x+3}{x+5} \to \frac{2}{3}$, kun $x \to 1$" tarkoittaa samaan kuin "jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$, jolla $|\frac{x+3}{x+5} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$, kun $0 < |x-1| < \delta$". Oletetaan siis ensin, että $\varepsilon > 0$ on jokin luku, ja etsitään sopiva $\delta > 0$, jolla määritelmän ehdot toteutuvat.

Lähdetään liikkeelle tarkastelemalla määritelmän ytimessä olevan epäyhtälön vasenta puolta $|\frac{x+3}{x+5} - \frac{2}{3}|$, jonka siis halutaan olevan pienempi kuin ε. Lavennetaan ensin itseisarvomerkkien sisällä olevat murtolausekkeet samannimisiksi, jotta samaan tapaan kuin lukujonojen raja-arvojen kanssa itseisarvomerkkien sisälle saadaan jäämään vain yksi murtolauseke:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+3}{x+5} - \frac{2}{3}\right| &= \left|\frac{3(x+3)}{3(x+5)} - \frac{2(x+5)}{3(x+5)}\right| = \left|\frac{3x+9}{3(x+5)} - \frac{2x+10}{3(x+5)}\right| = \left|\frac{3x+9-2x-10}{3(x+5)}\right| \\ &= \left|\frac{x-1}{3(x+5)}\right| = \frac{|x-1|}{|3(x+5)|} = \frac{|x-1|}{|3||x+5|} = \frac{|x-1|}{3|x+5|} = \frac{1}{3}\frac{|x-1|}{|x+5|}.\end{aligned}$$

Lisäksi itseisarvo jaettiin erikseen osoittajaan ja nimittäjään, kuten itseisarvon laskusääntöjen mukaan on sallittua, ja $\frac{1}{3}$ otettiin eteen kertoimeksi.

Funktion käytöksellä on raja-arvon kannalta merkitystä vain tarkasteltavan pisteen (tässä tapauksessa $x = 1$) lähistöllä, sillä nyt pohditaan, että kun x *lähestyy* lukua 1, niin lähestyykö $\frac{x+3}{x+5}$ lukua $\frac{2}{3}$. Voidaan siis rajoittua tarkastelemaan vain luvun 1 lähistöä. Tästä on hyötyä, kun halutaan arvioida edellä saatua lauseketta $\frac{1}{3}\frac{|x-1|}{|x+5|}$ ylöspäin. Muuttuja x kannattaa nyt rajoittaa maksimissaan 1:n etäisyydelle luvusta 1, jotta saadaan taattua, että se on positiivinen, jolloin murtolausekkeen nimittäjästä saadaan poistettua itseisarvomerkit ja lauseketta saadaan arvioitua ylöspäin:

$$\frac{1}{3}\frac{|x-1|}{|x+5|} = \frac{1}{3}\frac{|x-1|}{x+5} < \frac{1}{3}\frac{|x-1|}{5} = \frac{1}{15}|x-1|.$$

Jos tämä saadaan pienemmäksi kuin ε, niin alkuperäinen lausekekin on sitä pienempi eli tarkastellaan epäyhtälöä $\frac{1}{15}|x-1| < \varepsilon$. Tämä saadaan kertomalla puolittain 15:llä muotoon $|x-1| < 15\varepsilon$. Nyt siis halutaan, että tämä pätee, kun $0 < |x-1| < \delta$. Luku δ on siis valittava sellaiseksi, että sille pätee $\delta \leq 15\varepsilon$.

Edellä mainittiin, että muuttuja x halutaan rajoittaa maksimissaan 1:n etäisyydelle luvusta 1. Käytännössä tämä tapahtuu valitsemalla luvun δ arvo sillä tavalla, että sille pätee $\delta \leq 1$. Tällöin alussa mainitun raja-arvon määritelmän mukaan

$$|x-1| < \delta \leq 1$$

eli $|x-1|<1$ eli $x>0$. Valitaan nyt siis $\delta=\min\{15\varepsilon,1\}$. Näin ollaan taattu, että $\delta\leq 1$ ja $\delta\leq 15\varepsilon$.

Todistus: Olkoon $\varepsilon>0$. Valitaan $\delta=\min\{15\varepsilon,1\}$ ja oletetaan, että $0<|x-1|<\delta$. Edellisen pohdinnan nojalla saadaan

$$\left|\frac{x+3}{x+5}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{15}|x-1|<\frac{1}{15}\delta\leq\frac{1}{15}\cdot 15\varepsilon=\varepsilon.$$

Siis funktion raja-arvon määritelmän nojalla $\frac{x+3}{x+5}\to\frac{2}{3}$, kun $x\to 1$.

L4. Todista funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmän avulla, että ehdolla $f(x)=|x|$ määritelty funktio $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on jatkuva jokaisessa kohdassa $x_0\in\mathbb{R}$. Tarkastele erikseen tapauksia $x_0<0$, $x_0=0$ ja $x_0>0$.

Ratkaisu:

(1) *Tapaus* $x_0>0$*:*

Pohdintaa: Jatkuvuuden määritelmään mukaan funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos $f(x)\to f(x_0)$, kun $x\to x_0$, eli funktio lähestyy omaa arvoaan kyseisessä kohdassa. Nyt tarkasteltava funktio on $f(x)=|x|$ eli raja-arvon määritelmää käyttäen tämän funktion jatkuvuus tarkoittaa sitä, että jokaista $\varepsilon>0$ kohti on olemassa $\delta>0$, jolla $\big||x|-|x_0|\big|<\varepsilon$, kun $0<|x-x_0|<\delta$. Oletetaan siis, että $\varepsilon>0$ on jokin luku, ja etsitään sopiva $\delta>0$, joka täyttää ehdon.

Tarkastellaan määritelmän ε-epäyhtälön vasenta puolta $\big||x|-|x_0|\big|$. Nyt todistetaan tapausta $x_0>0$ eli lauseke saadaan muotoon $\big||x|-x_0\big|$. Lisäksi muuttuja x voidaan rajoittaa edellisen tehtävän tapaan luvun x_0 lähistölle siten, että saadaan $x>0$. Käytännössä tämä tapahtuu edellisen tehtävän tapaan valitsemalla δ, jolle pätee $\delta\leq x_0$. Nyt tutkailtavaa lauseketta saadaan siis yksinkertaistettua edelleen:

$$\big||x|-x_0\big|=|x-x_0|.$$

Haluttiin siis löytää $\delta>0$, jolla tämä juuri saatu $|x-x_0|<\varepsilon$, kun $|x-x_0|<\delta$. Luku δ on siis valittava sellaiseksi, että sille pätee $\delta\leq\varepsilon$. Lisäksi haluttiin, että $\delta\leq x_0$, eli valitaan $\delta=\min\{\varepsilon,x_0\}$. Nyt halutunlainen δ ollaan siis löydetty ja tapaus $x_0>0$ on todistettu.

Todistus: Olkoon $\varepsilon>0$. Valitaan $\delta=\min\{\varepsilon,x_0\}$ ja oletetaan, että $0<|x-x_0|<\delta$. Edellisen pohdinnan nojalla saadaan

$$\big||x|-|x_0|\big|=|x-x_0|<\delta=\min\{\varepsilon,x_0\}\leq\varepsilon.$$

Siis funktion raja-arvon määritelmän nojalla $|x|\to|x_0|$, kun $x\to x_0$, eli funktio on jatkuva kohdassa x_0.

(2) *Tapaus* $x_0=0$*:*

Pohdintaa: Tarkastellaan edellisen tapauksen tapaan raja-arvon määritelmän ε-epäyhtälön vasenta puolta $\big||x|-|x_0|\big|$. Nyt todistetaan tapausta $x_0=0$ eli lauseke saadaan muotoon

$$\big||x|-0\big|=\big||x|\big|=|x|=|x-0|=|x-x_0|.$$

Tälle halutaan jälleen löytää $\delta > 0$, jolla tämä $|x - x_0| < \varepsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$. Nyt voidaan siis valita $\delta = \varepsilon$. Tällä kertaa muuttujaa x ei tarvinnut rajoittaa, joten tämä riittää todistamaan tapauksen.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon$ ja oletetaan, että $0 < |x - x_0| < \delta$. Edellisen pohdinnan nojalla saadaan

$$\Big||x| - |x_0|\Big| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Siis funktion raja-arvon määritelmän nojalla $|x| \to |x_0|$, kun $x \to x_0$, eli funktio on jatkuva kohdassa x_0.

(3) *Tapaus* $x_0 < 0$*:*

Pohdintaa: Tarkastellaan edellisten tapausten tapaan raja-arvon määritelmän ε-epäyhtälön vasenta puolta $\Big||x| - |x_0|\Big|$. Nyt todistetaan tapausta $x_0 < 0$ eli lauseke saadaan muotoon

$$\Big||x| - (-x_0)\Big| = \Big||x| + x_0\Big|.$$

Lisäksi muuttuja x voidaan rajoittaa samaan tapaan kuin edellä luvun x_0 lähistölle siten, että saadaan $x < 0$ (*pienemmäksi* kuin 0 tällä kertaa, koska $x_0 < 0$). Käytännössä tämä tapahtuu nyt valitsemalla δ, jolle pätee $\delta \leq |x_0|$. Tällöin tutkailtavaa lauseketta saadaan siis yksinkertaistettua edelleen:

$$\Big||x| + x_0\Big| = |-x + x_0| = |-(x - x_0)| = |x - x_0|.$$

Haluttiin siis löytää $\delta > 0$, jolla tämä juuri saatu $|x - x_0| < \varepsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$. Luku δ on siis valittava sellaiseksi, että sille pätee $\delta \leq \varepsilon$. Lisäksi haluttiin, että $\delta \leq |x_0|$, eli valitaan $\delta = \min\{\varepsilon, |x_0|\}$. Nyt halutunlainen δ ollaan siis löydetty ja viimeinen tapaus $x_0 < 0$ on todistettu.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\varepsilon, |x_0|\}$ ja oletetaan, että $0 < |x - x_0| < \delta$. Edellisen pohdinnan nojalla saadaan

$$\Big||x| - |x_0|\Big| = |x - x_0| < \delta = \min\{\varepsilon, |x_0|\} \leq \varepsilon.$$

Siis funktion raja-arvon määritelmän nojalla $|x| \to |x_0|$, kun $x \to x_0$, eli funktio on jatkuva kohdassa x_0.

L5. Oletetaan, että funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ehdon $|g(x)| \leq 3$. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^2 g(x)$. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x_0 = 0$.

Ratkaisu:

Pohdintaa: Derivaatan määritelmän mukaan funktio f on derivoituva kohdassa x_0 ja sen derivaatta on reaaliluku A, jos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A,$$

kun $x \to x_0$. Nyt tarkasteltava funktio on siis $f(x) = x^2 g(x)$. Jotta derivaatan olemassa oloa eli derivoituvuutta voidaan tarkastella määritelmän perusteella on keksittävä, mikä derivaatan arvo A on. Monesti tätä ei voida tietää etukäteen, vaan on kokeiltava eri arvoja, kunnes löydetään oikea. Tässä tapauksessa hyvä arvaus olisi, että kyseinen derivaatan arvo A kohdassa 0 olisi 0, sillä funktiossa f on kertoimena x^2, jonka derivaatta kohdassa 0 on 0. Kokeillaan siis, saadaanko derivaatan määritelmä toimimaan, kun $A = 0$.

Käyttämällä funktion raja-arvon määritelmää derivaatan määritelmä saadaan muotoon: jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$, jolla

$$\left|\frac{x^2 g(x) - 0^2 g(0)}{x - 0} - 0\right| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x - 0| < \delta$. Oletetaan siis, että $\varepsilon > 0$ on jokin luku, ja etsitään sopiva $\delta > 0$, joka täyttää ehdon.

Nyt määritelmän ε-epäyhtälön vasenta puolta saadaan muokattua seuraavalla tavalla:

$$\left|\frac{x^2 g(x) - 0^2 g(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x)}{x}\right| = |xg(x)| = |x||g(x)| \leq |x| \cdot 3.$$

Viimeisessä kohdassa on käytetty tehtävänannon tietoa: $|g(x)| \leq 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Haluttiin siis löytää $\delta > 0$, jolla tälle juuri saadulle $|x| \cdot 3$:lle pätee $|x| \cdot 3 < \varepsilon$, kun $|x - 0| < \delta$ eli kun $|x| < \delta$. Nyt voidaan siis valita $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Halutunlainen δ ollaan siis löydetty ja raja-arvon määritelmä ollaan siten saatu osoitettua todeksi. Funktio f on siis derivoituva kohdassa $x = 0$, mikä oli se, mitä haluttiin todistaa. Lisäksi sen derivaataksi osoittautui kuin osoittautuikin arvattu $A = 0$.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ ja oletetaan, että $0 < |x - 0| < \delta$. Edellisen pohdinnan nojalla saadaan

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x) - 0^2 g(0)}{x - 0} - 0\right| \leq 3|x| = 3|x - 0| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Siis funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to 0, \text{ kun } x \to 0,$$

eli funktio f on derivoituva kohdassa 0 ja sen derivaatta on 0 siinä.