HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5}{n^2+3} = \infty.$$

Ratkaisu:

Lukujono x_n kasvaa rajatta, jos kaikille $M \in \mathbb{R}$ on olemassa sellainen kynnys $k \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > k$ pätee $x_n > M$.

Pohdintaa: Arvioidaan lukujonon lauseketta alaspäin.[1] Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\frac{n^3-5}{n^2+3} \geq \frac{n^3-5}{n^2+3n^2} \geq \frac{n^3-5}{4n^2} \geq \frac{n^3-5n^2}{4n^2} = \frac{n-5}{4}$$

Nyt haluaisimme kirjoittaa, että $\frac{n-5}{4} > M$ millä tahansa $M \in \mathbb{R}$. Havaitaan yhtäpitävyys

$$\frac{n-5}{4} > M \quad \Longleftrightarrow \quad n > 4M+5,$$

eli haluamamme arviointi voidaan lisätä, kunhan $n > 4M+5$.

Todistus: Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan kynnys $k > 4M+5$. Nyt kaikilla $n > k$ pätee

$$\frac{n^3-5}{n^2+3} \geq \ldots \geq \frac{n-5}{4} > \frac{k-5}{4} > \frac{4M+5-5}{4} = M$$

Näin on osoitettu, että tehtävänannon lukujono todellakin kasvaa rajatta.

A2. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-n^3}{n^2-3} = -\infty.$$

Ratkaisu: Lukujono x_n vähenee rajatta, jos kaikille $m \in \mathbb{R}$ on olemassa sellainen kynnys $k \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > k$ pätee $x_n < m$.

Pohdintaa: Arvioidaan lukujonon lauseketta ylöspäin.[1] Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\frac{2-n^3}{n^2-3} \leq \frac{2-n^3}{n^2} \leq \frac{2n^2-n^3}{n^2} = 2-n$$

Nyt haluaisimme kirjoittaa, että $2-n < m$ millä tahansa $m \in \mathbb{R}$. Havaitaan yhtäpitävyys

$$2-n < m \quad \Longleftrightarrow \quad n > 2-m,$$

eli haluamamme arviointi voidaan lisätä, kunhan $n > 2-m$.

Todistus: Olkoon $m \in \mathbb{R}$. Valitaan kynnys $k > 2-m$. Nyt kaikilla $n > k$ pätee

$$\frac{2-n^3}{n^2-3} \leq \ldots \leq 2-n < 2-k < 2-(2-m) = m$$

Näin on osoitettu, että tehtävänannon lukujono todellakin vähenee rajatta.

[1] Kannattaa huomata, että osoittajassa ja nimittäjässä on negatiivisia termejä, joten murtolausekkeiden arvioinnissa tulee ottaa huomioon mahdolliset merkinvaihdokset. Näissä nimenomaisissa tapauksissa halutut arviot voidaan tehdä, mutta yleisesti tällaisia murtolausekkeita arvioidessa tulee olla erittäin huolellinen!

A3. Määritellään lukujono (x_n) ehdoilla $x_1 = 3$ ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}).$$

(a) Osoita, että jono suppenee osoittamalla, että se on alhaalta rajoitettu ja laskeva (vähenevä).

(b) Määritä jonon raja-arvo.

Ratkaisu:

(a) Osoitetaan induktiivisesti, että lukujonon (eräs) alaraja on 1. Toisin sanoen osoitetaan, että $x_n \geq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

- Alkuaskel: Väite pätee, kun $n = 1$: $x_1 = 3 \geq 1$.
- Induktioaskel: Oletetaan, että väite pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$ (eli $x_k \geq 1$). Tällöin väite pätee myös kun $n = k+1$: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \sqrt{x_k}) \geq \frac{1}{2}(1+1) \geq 1$

Siis (x_n) on alhaalta rajoitettu.

Osoitetaan seuraavaksi, että $x_{n+1} \leq x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) = \frac{x_n - \sqrt{x_n}}{2} \geq 0$$

Viimeinen arviointi seuraa siitä, että $a \geq \sqrt{a}$ kaikilla $a \geq 1$.

Nyt on osoitettu, että x_n on alhaalta rajoitettu ja vähenevä, joten lauseen 2.3.9 perusteella se suppenee.

(b) Tehdään aluksi muutamia huomioita:

- (a)-kohdan perusteella tiedämme, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, missä a on jokin reaaliluku.
- Edellisen viikon tehtävien perusteella tiedämme, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

- Lauseen 2.2.8 ja edellisen viikon tehtävän L1 perusteella

$$\frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) \to \frac{1}{2}(a + \sqrt{a})$$

  kun $n \to \infty$.
- Yhtäsuuruus säilyy rajalla, eli

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n})$$

Näin ollen

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a}),$$

mistä voidaan ratkaista a:

$$a = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{a} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1 \quad \text{tai} \quad a = 0$$

Arvo $a = 0$ voidaan hylätä, koska edellä osoitettiin, että $x_n \geq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.[2] Eli $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

[2]Raja-arvo ei voi "hypätä"välin $]0,1[$ yli!

A4. Määritä $\inf A$ ja $\sup A$, missä

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ tai } 3 < x < 4\}.$$

Ratkaisu: Väitetään, että $\inf A = 1$ ja $\sup A = 4$. Tarkistetaan nämä infimumin ja supremumin määritelmän avulla.

$\inf A = 1$, koska:

- Kaikilla $x \in A$ pätee $x \geq 1$, eli 1 on eräs alaraja.
- Mikään luku muotoa $1+h$, missä $0 < h < 1$[3], ei voi olla A:n alaraja, sillä esim. luku $1 + h/2$ on A:n alkio. Siis 1 on suurin alaraja, eli infimum.

$\sup A = 4$, koska

- kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq 4$, eli 4 on eräs yläraja
- Mikään luku muotoa $4-h$, missä $0 < h < 1$[3], ei voi olla A:n yläraja, sillä esim. luku $4 - h/2$ on A:n alkio. Siis 4 on pienin alaraja, eli supremum.

A5. Oletetaan, että $x_n \to 3$ ja $y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Huomaa, että kurssilla ei ole lausetta, jota voisi tässä soveltaa. Tehtävässä täytyy työskennellä siksi määritelmien pohjalta.

Ratkaisu:

Pohdintaa: Kuten tehtävässä A1, halutaan arvioida lukujonon termejä alaspäin. Halutaan kirjoittaa

$$\text{"}x_n + y_n > M\text{"}$$

kun M on jokin ennalta annettu, mielivaltainen reaaliluku. Tehtävän ideana on arvioida erikseen termejä x_n ja y_n.

Käytämme tähän arviointiin oletuksia $x_n \to 3$ ja $y_n \to \infty$, joten avataan aluksi niiden sisältö. Muuttujien nimillä (ϵ, M, k jne.) ei ole varsinaisesti merkitystä, joten nimetään muuttujat tässä selkeyden vuoksi sopivasti.

- $x_n \to 3$ kun $n \to \infty$ tarkoittaa määritelmän nojalla, että kaikilla $\epsilon_x > 0$ löytyy sellainen kynnys $k \in \mathbb{N}$, että $|x_n - 3| < \epsilon_x$ kunhan $n > k$.
- $y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$ tarkoittaa määritelmän nojalla, että kaikilla $M_y \in \mathbb{R}$ löytyy sellainen kynnys $k \in \mathbb{N}$, että $y_n > M_y$ kunhan $n > k$.

Todistus: Olkoon $M \in \mathbb{R}$.

Valitaan $\epsilon_x = 1$. Tällöin on olemassa sellainen $k_x \in \mathbb{N}$, että $|x_n - 3| < 1$ kunhan $n > k_x$. Kun $n > k_x$, niin itseisarvolemman nojalla

$$|x_n - 3| < 1 \quad \iff \quad -1 < x_n - 3 < 1 \quad \iff \quad 2 < x_n < 4$$

Erityisesti $x_n > 2$.

Valitaan $M_y = M - 2$. Tällöin on olemassa sellainen $k_y \in \mathbb{N}$, että $y_n > M_y$ kunhan $n > k_y$.

Lopuksi valitaan $k = \max\{k_x, k_y\}$. Kun $n > k$, molemmat ehdot $n > k_x$ ja $n > k_y$ ovat voimassa, joten seuraava arvio pätee:

$$x_n + y_n > 2 + y_n > 2 + M_y = 2 + (M - 2) = M$$

Siis määritelmän nojalla $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

---

[3] Mieti, miksi vaaditaan $0 < h < 1$ ja miksi se riittää!