HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Oletetaan, että $x_n > 0$ kaikilla n ja että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$. Osoita, että

$$\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}.$$

Ratkaisu: Pohdintaa:

Arvioidaan etäisyyttä

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= \left| \frac{(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})} \right| \\
&= \left| \frac{x_n - a}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| \\
&= \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \\
&\leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Tämä arvio pätee vain, kun $a \neq 0$. Tutkitaan tapaus $a = 0$ myöhemmin erikseen.

Koska $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $a \geq 0$.
Huomataan yhtäpitävyys:

$$\frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$$

Todistus tapaus $a > 0$:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnys $K \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}.$$

Tällöin kaikille $n > K$ pätee

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Siis $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$, kun $a > 0$.

Pohdintaa tapaus $a = 0$:
Arvioidaan etäisyyttä

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= |\sqrt{x_n} - 0| \\
&= |\sqrt{x_n}| \\
&= \sqrt{x_n}
\end{aligned}
$$

Huomataan yhtäpitävyys:

$$\sqrt{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow x_n < \varepsilon^2$$

Todistus tapaus $a = 0$:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnys $K \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $n > K$ pätee $|x_n - 0| < \varepsilon^2$
Nyt kaikille $n > K$ pätee

$$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} = \sqrt{|x_n - 0|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Siis $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$, kun $a = 0$.

Siis $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

L2. Oletetaan tunnetuksi, että

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

kun $n \to \infty$. Selvitä tämän ja edellisen tehtävän perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Edellisen tehtävän tuloksesta on apua!

Ratkaisu:

Luvun e määritelmän mukaan

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Merkitään $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Tutkitaan lukujonoa $y_n = (1 + \frac{1}{2n})^{2n}$. Tämä lukujono on lukujonon x_n osajono, sillä $y_n = x_{2n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska x_n suppenee kohti raja-arvoa e, lauseen 2.2.12 perusteella nyt myös y_n suppenee kohti raja-arvoa e, eli

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Lukujonon (y_n) suppenemisen kohti lukua e voisi myös osoittaa samaan tapaan kuin tehtävässä A3.

Haluamme käyttää tätä tietoa hyväksemme, joten muokataan tehtävänannon lauseketta sellaiseen muotoon, jossa näkyy haluttu lauseke:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus pätee, sillä selvästi pätee $(1+\frac{1}{2n})^n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Tehtävässä L1 olemme osoittaneet, että, jos $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to a$, kun $n \to \infty$, niin pätee $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$, kun $n \to \infty$. Näiden tietojen perusteella voimme päätellä

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \to \sqrt{e}, \text{ kun } n \to \infty.$$

L3. Osoita, että $n - \sqrt{n} \to \infty$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu:

Halutaan siis osoittaa, että kaikille $M \in \mathbb{R}$ on olemassa kynnys $K \in \mathbb{N}_1$, jolle kaikilla $n > K$ pätee $n - \sqrt{n} > M$. Lähdetään siis arvioimaan lauseketta $n - \sqrt{n}$ alas päin.

Pohdintaa:

Arvioidaan lauseketta alas päin:

$$n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \geq 1 \cdot (\sqrt{n}-1) = \sqrt{n} - 1$$

Kun $M \geq 0$, huomataan yhtäpitävyys:

$$\sqrt{n} - 1 > M \Leftrightarrow n > (M+1)^2$$

Todistus:

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Määritetään $M' = \max(0, M)$. Valitaan $K \in \mathbb{N}$ siten, että $K \geq (1+M')^2$.

Nyt kaikille $n > K$ pätee:

$$n - \sqrt{n} \geq \sqrt{n} - 1 > \sqrt{K} - 1 \geq \sqrt{(1+M')^2} - 1 = M' \geq M.$$

Siis $n - \sqrt{n} \to \infty$ kun $n \to \infty$.

L4. Tarkastellaan reaalilukujen joukon osajoukkoa

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}.$$

Osoita, että on olemassa $a = \sup A$ ja että $a^2 = 5$. Tehtävässä osoitetaan siis, että luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo seuraa reaalilukujen aksiomeista.

Ratkaisu:

Koska $1 \in A$, niin A on epätyhjä. Koska kaikilla $x \in A$ pätee $x < 5$, niin A on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla joukolla A on olemassa supremum $\sup A$. $\sup A > 0$, koska $1 \in A$ ja $\sup A$ on joukon A yläraja. Merkitään $a = \sup A$. Osoitetaan seuraavaksi, että $a^2 = 5$, eli että a on hakemamme reaaliluku. Todistus onnistuu osoittamalla, että epäyhtälöt $a^2 < 5$ ja $a^2 > 5$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan ensin, että $a^2 < 5$. Nyt jos löydetään luku $h > 0$, jolle pätee $(a+h)^2 < 5$, niin $a+h \in A$ ja $a+h > a$, jolloin luku a ei voi olla joukon A yläraja eikä siis supremum. Lähdetään etsimään tällaista lukua h. Nyt jos $0 < h < 1$, niin

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h = a^2 + h(2a+1)\,.$$

Huomataan yhtäpitävyys

$$a^2 + h(2a+1) < 5 \iff h < \frac{5-a^2}{2a+1}\,.$$

Siis halutaan valita h, joka on lukua $\frac{5-a^2}{2a+1}$ pienempi. Otetaan puolet tästä, eli valitaan $h = \min\left\{\frac{1}{2}\frac{5-a^2}{2a+1}, \frac{1}{2}\right\}$ (otamme minimin näistä kahdesta luvusta, sillä haluamme lisäksi varmistaa, että $h < 1$ pätee). Nyt

$$(a+h)^2 < a^2 + h(2a+1) \leq a^2 + \frac{1}{2}(5-a^2) = \frac{a^2+5}{2} < \frac{5+5}{2} = 5\,.$$

Siis $(a+h)^2 < 5$, jolloin $a+h \in A$ sekä $a+h > a$. Koska $a = \sup A$, niin tämä on ristiriita supremumin määritelmän nojalla, sillä nyt a ei ole joukon A yläraja.

Oletetaan sitten, että $a^2 > 5$. Nyt jos löydetään luku $h > 0$, jolle pätee $(a-h)^2 > 5$, niin $a-h$ on joukon A yläraja ja $a-h < a$, jolloin a ei voi olla joukon A **pienin** yläraja. Lähdetään etsimään tällaista lukua h. Kaikilla $h > 0$ pätee

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah\,.$$

Huomataan yhtäpitävyys

$$a^2 - 2ah > 5 \iff h < \frac{a^2-5}{2a}\,.$$

Siis halutaan valita h, joka on lukua $\frac{a^2-5}{2a}$ pienempi. Otetaan puolet tästä, eli valitaan $h = \frac{1}{2}\frac{a^2-5}{2a} > 0$. Nyt

$$(a-h)^2 > a^2 - 2ah = a^2 - \frac{a^2-5}{2} = \frac{a^2+5}{2} > \frac{5+5}{2} = 5\,.$$

Siis $a-h < a$ ja $a-h$ on joukon A yläraja. Koska $a = \sup A$, niin tämä on ristiriita supremumin määritelmän nojalla, sillä nyt a ei ole joukon A **pienin** yläraja.

Näin ollen a on positiivinen reaaliluku, jolle ei päde $a^2 < 5$ eikä $a^2 > 5$. Tällöin täytyy päteä $a^2 = 5$, eli $a = \sqrt{5}$.

L5. Osoita, että tehtävän A4 lukujono suppenee.

Ratkaisu: Selvästi $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Osoitetaan ensin, että lukujono (x_n), joka on määritelty ehdoilla $x_1 = 3$ ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

kun $n = 1, 2, \ldots$, on vähenevä.

Lukujono (x_n) on vähenevä joss $x_{n+1} - x_n \leq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tutkitaan siis peräkkäisten lukujonon jäsenten erotusta:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{5}{2x_n} = \frac{5 - {x_n}^2}{2x_n}$$

Pyritään arvioimaan termiä x_n^2 siten, että saadaan yllä olevasta erotuksesta jotain negatiivista.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 10 + \frac{25}{x_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 10 - 20 + 20 + \frac{25}{x_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n - 10 + \frac{25}{x_n^2} + 20\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((x_n - \frac{5}{x_n})^2 + 20\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{5}{x_n}\right)^2 + 5 \\
&\geq 5
\end{aligned}$$

Yhtälöketjun nojalla saimme, että $x_{n+1}^2 \geq 5$. Lisäksi $x_1^2 = 9$, joten $x_n^2 \geq 5$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Nyt siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5 - {x_n}^2}{2x_n} \leq 0$$

Siis lukujono (x_n) on vähenevä.

Nyt lauseen 2.3.9 mukaan (x_n) joko suppenee tai vähenee rajatta. Koska $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin lukujono (x_n) ei vähene rajatta. Koska (x_n) ei vähene rajatta, se siis suppenee.