HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}.$$

Perustele tuloksesi tarkasti. Huomaa Lauseen 2.2.8. "jos ..., niin ..." -rakenne. Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojonojen ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista.

Ratkaisu: Muokataan tehtävän murtolauseke helpommin arvioitavaan muotoon ottamalla yhteiseksi tekijäksi n ja supistamalla se pois,

$$\frac{2n+1}{3n+1} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(3+\frac{1}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$$

Selvitetään lausekkeen raja-arvo kun $n \to \infty$ Lauseen 2.2.8. avulla. Koska pätee $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ja vakiojonon raja-arvo on vakio itse, Lauseen 2.2.8 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Vastaavasti pätee

$$\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

Nyt koska $3 + \frac{1}{n} \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ ja $\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n} \neq 0$, niin voimme käyttää Lausetta 2.2.8. jonojen $2 + \frac{1}{n}$ ja $3 + \frac{1}{n}$ osamäärän raja-arvon laskemiseen, eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3},$$

eli kysytty raja-arvo on $\frac{2}{3}$.

A2. Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^3+1}.$$

Perustele tuloksesi tarkasti. Huomaa lauseen 2.2.8. "jos ..., niin ..." -rakenne. Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojojen ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista.

Ratkaisu: Muokataan tehtävän murtolauseke helpommin arvioitavaan muotoon ottamalla yhteiseksi tekijäksi n^3 ja supistamalla se pois,

$$\frac{2n^2+1}{3n^3+1} = \frac{n^3(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3})}{n^3(3+\frac{1}{n^3})} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n^3}}$$

Teemme seuraavat raja-arvotarkastelut käyttäen Lausetta 2.2.8. ja tietoa, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = 0 + 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n^3} \right) = 3 + 0.$$

Koska viimeisen kohdan raja-arvo ei ole 0 ja $3 + \frac{1}{n^3} \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, voimme käyttää Lausetta 2.2.8 tehtävän osamäärään, eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0,$$

eli kysytty raja-arvo on 0.

A3. Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$.

(a) Määritellään y_n yhtälöllä $y_n = x_{n^2}$. Osoita että $y_n \to a$ kun $n \to \infty$.

(b) Määritellään z_n yhtälöillä $z_1 = 42$ ja $z_n = x_{n-1}$ kun $n > 1$. Osoita että $z_n \to a$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu: (a) Kerrataan raja-arvon määritelmä, eli

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $k \in \mathbb{N}_1$ jolla kaikilla $n > k$, pätee $|x_n - a| < \epsilon$

Osoitetaan määritelmää käyttämällä, että $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Tutkitaan raja-arvon a ja jonon y_n etäisyyttä,

$$|y_n - a| = |x_{n^2} - a|$$

Jos $k \in \mathbb{N}_1$ on sellainen luku, että kaikilla kokonaisluvuilla $n > k$ pätee $|x_n - a| < \epsilon$, niin seurauksena pätee $|x_{n^2} - a| < \epsilon$. Seuraus voidaan perustella sillä, että

$$n^2 \geq n > k \implies n^2 > k$$

Siis $|y_n - a| < \epsilon$ jos $n > k$, missä k on luku siten että $|x_n - a| < \epsilon$ jos $n > k$. Tällainen k voidaan aina löytää, koska jonon x_n raja-arvo on a. Muotoillaan vielä todistus.

Todistus: Olkoon $\epsilon > 0$, valitaan k jolla kaikilla $n > k$ pätee

$$|x_n - a| < \epsilon$$

Koska $n^2 > k$, kun $n > k$, niin myös

$$|x_{n^2} - a| < \epsilon,$$

eli jonon x_{n^2} raja-arvo on a.

(b) Tarkastellaan raja-arvon a ja jonon z_n etäisyyttä, olettaen että $n > 1$

$$|z_n - a| = |x_{n-1} - a|$$

Jos $k \in \mathbb{N}_1$ on sellainen luku, että kaikilla kokonaisluvuilla $n > k$ pätee $|x_n - a| < \epsilon$, niin myös jos $n > k+1$, niin $|x_n - a| < \epsilon$, kaikilla $n > k+1$. Huomataan yhtäpitävyys

$$n > k + 1 \iff n - 1 > k,$$

josta huomaamme, että jos $n-1>k$, niin $|x_{n-1}-a|<\epsilon$.
Todistus Olkoon $\epsilon>0$, valitaan k jolle kaikilla $n>k$ pätee

$$|x_n-a|<\epsilon$$

Jos $n>k+1$, niin pätee myös

$$|x_n-a|<\epsilon$$

Siis jos $n-1>k$, niin

$$|x_{n-1}-a|<\epsilon$$

Jos vaaditaan lisäksi $k>1$, niin jono z_n suppenee arvoon a.

A4. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), joka on määritelty ehdoilla $x_1=3$ ja

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right)$$

kun $n=1,2,\ldots$. Oletetaan tunnetuksi, että on olemassa reaaliluku a, jolle pätee, että $x_n\to a$ kun $n\to\infty$. Määritä luvun a ainoa mahdollinen arvo. Seuraako tehtävän päättelystä, että olemme samalla todistaneet, että jono (x_n) suppenee?

Ratkaisu: Oletetaan että on olemassa raja-arvo, eli $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. Tarkastellaan tehtävänannon rekursiivista lauseketta,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right),$$

Koska ylläolevan yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtäsuuret kaikilla $n\in\mathbb{N}_1$, ovat niiden raja-arvotkin yhtäsuuret, jos ne ovat olemassa. Oletimme, että jonolla x_n on raja-arvo a, eli saamme

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right),$$

Huomaamme, että kaikki lukujonon x_n jäsenet ovat positiivisia. Jonon ensimmäinen jäsen $x_1=3$ on positiivinen. Osoitetaan, että jos jokin lukujonon jäsen x_m on positiivinen, niin myös x_{m+1} on positiivinen, eli tehdään induktioaskel. Koska oletimme, että $x_m>0$, niin pätee $\frac{1}{2}x_m>0$ ja $\frac{5}{2x_m}>0$, eli summalle pätee $\frac{1}{2}x_m+\frac{5}{2x_m}>0$, mikä on lukujonon x_n määritelmän nojalla yhtäpitävää sen kanssa että $x_{m+1}>0$. Siis kaikki lukujonon arvot ovat positiivisia.

Tarkastellaan raja-arvoa $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right)$ Lauseen 2.2.8 avulla. Koska $x_n>0$ ja $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, niin tiedämme että

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{x_n}=\frac{5}{a},$$

jos lisäksi oletamme että $a\neq 0$. Summalle raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty}x_n+\frac{5}{x_n}=a+\frac{5}{a}$$

Kun huomaamme, että $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=a$, saamme yhtälön raja-arvolle a

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{5}{a}\right)$$

Voimme muokata ylläolevan yhtälön toisen asteen yhtälöksi kertomalla luvulla a,

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2} \\ \iff \frac{1}{2}a^2 &= \frac{5}{2} \\ \iff a^2 &= 5, \end{aligned}$$

eli joko $a = \sqrt{5}$ tai $a = -\sqrt{5}$. Koska aiemmin todistimme, että $x_n > 0$, niin raja-arvon ainoa mahdollinen arvo on $\sqrt{5}$. Oletimme aiemmin, että $a \neq 0$. Nyt perustelemme, miksi $a = 0$ ei voi olla raja-arvo. Tarkastellaan rekursioyhtälöä ja huomataan yhtäpitävyys

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) \iff x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = \frac{5}{2x_n}$$

Koska jono x_n suppenee, niin myös jono $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$ suppenee Lauseen 2.2.8 nojalla. Jos $a = 0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Pitäisi siis päteä, että jono $\frac{5}{2x_n}$ suppenee myös, sillä kaikki jonojen $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$ ja $\frac{5}{2x_n}$ jäsenet ovat samoja. Mutta jos $a = 0$, jonolla $\frac{5}{2x_n}$ ei ole raja-arvoa. Siis on oltava $a \neq 0$. Käytimme todistuksessa Lausetta 2.2.8, jossa vaaditaan, että raja-arvo on olemassa. Emme siis vielä tiedä, onko lukujonon raja-arvo $\sqrt{5}$.

A5. Määritellään, että lukujono (x_n) kasvaa rajatta, jos kaikilla reaaliluvuilla M on olemassa kynnys $K \in \mathbb{N}_1$, jolle kaikilla $n > K$ pätee $x_n > M$. Tätä merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

ja myös

$$x_n \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Osoita, että

$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Vihje: Arvioi lukujonon jäsentä $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ alaspäin sellaiseksi lausekkeeksi, josta on helppo tietää kuinka suuri indeksin n riittää olla jotta $x_n > M$.

Ratkaisu: Arvioidaan tehtävässä annettua murtolauseketta alaspäin jättämällä osoittajasta vakio 1 pois,

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1},$$

ja

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2},$$

missä käytimme arviota $n \geq 1$. Tutkitaan, milloin $\frac{n}{2} > M$ ja huomataan yhtäpitävyys

$$\frac{n}{2} > M \iff n > 2M,$$

eli valitaan K siten että $K \geq 2M$ ja $K \in \mathbb{N}_1$. Kirjoitetaan lopuksi todistus väitteelle, että $\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty$ kun $n \to \infty$.
Todistus: Osoitimme jo, että pätee

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2}$$

Jos K on positiivinen kokonaisluku siten että $K > 2M$, ja oletamme että $n > K$, niin saamme epäyhtälön

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2} > \frac{K}{2} \geq \frac{2M}{2} = M,$$

eli silloin $\frac{n^2+1}{n+1} > M$. Koska emme tehneet arvioissa ollenkaan oletuksia luvun M suhteen, niin kaikilla reaaliluvuilla M löytyy K siten että jos $n > K$ niin $x_n > M$. Siis määritelmän mukaisesti lukujono x_n kasvaa rajatta.