HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 4L – Ratkaisuehdotuksia

L1. Selvitä kurssin lukujonojen raja-arvoja koskevien tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1}.$$

Ratkaisu: Muokataan aluksi tutkittavaa lukujonoa tässä tapauksessa hyödyllisempään muotoon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{n^3(4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}.$$

Lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella voidaan helposti osoittaa, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ja } \lim_{n\to\infty} a = a,$$

kun a on jokin reaaliluku, joten oletetaan nämä tunnetuiksi. Nyt kirjan lauseen 2.2.8 ja edellisten tulosten perusteella seuraavat raja-arvot ovat olemassa:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n}\right) = 3\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 3\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 2\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4\cdot\frac{1}{n^3}\right) = 4\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\frac{1}{n^3}\right) = 1\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right) = 1+0+0+0 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) = 4+0+0+0 = 4.$$

Nyt koska

$$4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} \neq 0 \text{ ja } 4 \neq 0,$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n = 1, 2, 3\ldots$, voidaan edelleen soveltaa lausetta 2.2.8 saaden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{4}.$$

L2. Tarkastellaan lukujonoja (x_n) ja (y_n).

(a) Oletetaan, että molemmat hajaantuvat. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(b) Oletetaan, että jono (x_n) suppenee ja jono (y_n) hajaantuu. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(c) Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, ja että jono (y_n) hajaantuu. Oletetaan lisäksi, että $x_n \neq 0$ kaikilla n $\mathbb{N}_1$. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

Ratkaisu: (a) Summajonon (x_n+y_n) suppenemisesta ei voida sanoa mitään. Valitaan ensin vaikkapa (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n$ ja $y_n = x_n$. Siis jono (x_n) vuorottelee lukujen -1 ja 1 välillä eikä näin ollen suppene. Tällöin $(x_n + y_n) = (x_n + x_n) = 2(x_n)$ eli summajono jää vuorottelemaan lukujen -2 ja 2 välille eikä näin ollen suppene.

Toisaalta, jos valitaankin (x_n) kuten edellä, mutta $y_n = -x_n$ saadaan summajonoksi $x_n + y_n = x_n - x_n = 0$, joka on vakiojono ja suppenee lukuun 0. Tällöinkin siis (y_n) jää hyppimään lukujen -1 ja 1 välille, mutta eri ”tahdissa” kuin (x_n), jolloin jonojen termit kumoavat toisensa.

Siispä tässä tapauksessa summajono voi tapauksesta riippuen supeta tai olla suppenematta.

(b) Jos (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu, voidaan osoittaa, että summajono (x_n+y_n) hajaantuu. Todistetaan tämä tekemällä vastaoletus.

Oletetaan, että jono $(x_n + y_n)$ suppenee lukuun $b \in \mathbb{R}$. Toisaalta, tehtävänannon oletuksen nojalla tiedetään, että (x_n) suppenee myös johonkin lukuun $a \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että tällöin jono (y_n) suppenee lukuun $b-a$, mistä saadaan haluttu ristiriita.

Tapa 1

Tiedetään, että (x_n) suppenee johonkin lukuun $a \in \mathbb{R}$, joten $(-x_n)$ suppenee lukuun $-a \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (y_n + x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} ((y_n + x_n) + (-x_n)) = b + (-a) = b - a$$

saatiin kirjan lauseen 2.2.8 nojalla (y_n):lle raja-arvo, mikä on ristiriidassa alkuperäisten oletusten kanssa. Siispä vastaoletus on epätosi ja summajonon $(x_n + y_n)$ täytyy hajaantua.

Tapa 2

Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletusten ja raja-arvon määritelmän nojalla löytyy kynnys $k \in \mathbb{N}$, jolla pätee

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$|x_n + y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kunhan $n > k$. Tällöin

$$\begin{aligned} |y_n - (b-a)| &= |y_n + x_n - x_n - b + a| \\ &= |(y_n + x_n) - b + a - x_n| \\ &\leq |(y_n + x_n) - b| + |a - x_n| \\ &= |(y_n + x_n) - b| + |x_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa kolmioepäyhtälöstä. Näin ollen raja-arvon määritelmän nojalla jono (y_n) suppenee lukuun $b-a$, mutta tämä on ristiriita, sillä jonon (y_n) oletettiin hajaantuvan. Siispä vastaoletus on epätosi ja summajonon $(x_n + y_n)$ täytyy hajaantua.

(c) Tässäkin tapauksessa jono voi supeta tai hajaantua. Hajaantuvaksi tapaukseksi käy esimerkiksi $x_n = 1$ ja $y_n = n$. Tällöin pätee $x_n y_n = n = y_n$, joten jono $(x_n y_n)$ hajaantuu, sillä jono (y_n) hajaantuu.

Suppeneva tapaus saadaan esimerkiksi valitsemalla $x_n = 1/n$, jolloin $(x_n) \to 0$, kun $n \to \infty$ ja $y_n = n$. Tällöin $x_n y_n = 1$ kaikilla n, joten jono $(x_n y_n)$ on vakiojono, joka suppenee lukuun 1.

L3. Etsi kirjasta Bernoullin epäyhtälö ja selvitä, mitä se kertoo meille. Osoita sitten Bernoullin epäyhtälön avulla tarkasti, että

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Bernoullin epäyhtälöä sovellettaessa kannattaa ajatella, että

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2} - 1)}.$$

Ratkaisu:

Bernoullin epäyhtälön mukaan reaaliluvuille $x > -1$ ja luonnollisille luvuille $n = 1, 2, 3, \ldots$ on voimassa

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Osoitetaan väite lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella. Ryhdytään muokkaamaan lauseketta

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right|,$$

kun $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n}.$$

Huomataan, että Bernoullin epäyhtälön oletukset ovat voimassa ($\frac{1}{2} > -1, n = 1, 2, 3, \ldots$), joten lauseketta voidaan sen avulla arvioida ylöspäin:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} < \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}.$$

Huomataan yhtäpitävyys:

$$\frac{2}{n} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{2}{\varepsilon}$$

Nyt voidaan muodostaa todistus.

Oletetaan $\varepsilon > 0$. Valitaan luvuksi k pienin luonnollinen luku, jolle $k \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Tällöin

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^n} \leq \frac{1}{1+\frac{n}{2}} < \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n} < \frac{2}{k} \leq \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

kaikilla $n > k$. Joten siis raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

L4. Lukujonon raja-arvon määritelmässä on "kvanttoririmpsu"

$$\forall \epsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}_1\, \forall n > K.$$

Yksi tapa saada tuntumaan tähän on miettiä muita rimpsuja. Selvitä mitä seuraavat kertovat lukujonosta (x_n).

(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0\, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$,

(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \exists \varepsilon > 0\, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$.

Ratkaisu:
(a) Kirjoitetaan kyseinen ehto sanoin auki: on olemassa sellainen luonnollinen luku K, että kaikilla positiivisilla epsilon ja kaikilla $n > K$ lukujonon etäisyys pisteestä a on alle epsilonin. Siispä jonkun indeksin jälkeen kaikki lukujonon termit ovat "rajoittamattoman lähellä" lukua a, eli (x_n) on tämän indeksin jälkeen vakiojono ja $x_n = a$. On hyvä huomata, että (a) -ehto on tavallista raja-arvoa vahvempi väite, ja siitä seuraa, että a on jonon x_n raja-arvo.

(b) Nyt ehdon mukaan on olemassa sellainen luonnollinen luku K, ja sellainen positiivinen epsilon, että kaikilla K:ta suuremmilla indekseillä lukujonon termien etäisyys pisteestä a on alle epsilonin. Jonkun kynnyksen jälkeen etäisyys ei siis voi olla suurempi kuin eräs tietty epsilon, toisin sanoen lukujono on rajoitettu tämän indeksin jälkeen välille $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Lukujonon raja-arvon olemassaolosta sen sijaan ei voida päätellä mitään. Jos lukujonolla kuitenkin tiedettäisiin olevan raja-arvo, niin b) -ehto seuraisi raja-arvon määritelmästä.

L5. Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, ja että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Tätä tietoa tarvitaan todistettaessa lukujonojen raja-arvojen yhteyttä jakolaskuun. Voit esimerkiksi tarkastella erikseen tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$.

Ratkaisu: Tutkitaan vihjeen mukaisesti tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$ erikseen.
Oletetaan ensiksi, että $a > 0$. Piirrä kuva! Tällöin $\frac{a}{2} > 0$, joten löytyy sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

koska jono x_n suppenee kohti lukua a. Itseisarvolemman nojalla siis

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2},$$

ja edelleen tutkimalla kaksoisepäyhtälön vasenta epäyhtälöä ja lisäämällä luku a puolittain saadaan

$$\frac{a}{2} < x_n.$$

Koska $x_n \leq |x_n|$ ja koska $-|x_n| \leq 0$ pätee

$$-|x_n| \leq 0 < \frac{a}{2} < x_n \leq |x_n|$$

eli

$$-|x_n| < \frac{a}{2} < |x_n|.$$

Itseisarvolemmasta seuraa nyt, että $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

Oletetaan sitten, että $a < 0$ ja edetään vastaavasti kuin edellä. Nyt $-\frac{a}{2} > 0$, joten löytyy sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < -\frac{a}{2}.$$

Itseisarvolemman nojalla siis

$$\frac{a}{2} < x_n - a < -\frac{a}{2},$$

ja edelleen tutkimalla kaksoisepäyhtälön oikeaa epäyhtälöä ja lisäämällä luku a puolittain saadaan

$$x_n < \frac{a}{2}.$$

Erityisesti siis $x_n < 0$, joten $|x_n| = -x_n$ eli $-|x_n| = x_n$. Lisäksi koska $|x_n| \geq 0$ pätee

$$-|x_n| = x_n < \frac{a}{2} < 0 \leq |x_n|$$

eli

$$-|x_n| < \frac{a}{2} < |x_n|.$$

Itseisarvolemmasta seuraa taas, että $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

On siis osoitettu väite todeksi. Väistämättä herää kysymys, miksi oletimme alussa, että $a \neq 0$? Vastaesimerkiksi kelpaa vakiojono, joka saa aina arvokseen 0.