HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

on tosi.

Ratkaisu: Lukujonon raja-arvon märitelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$, joss kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy sellainen kynnys k, että kaikilla $n > k$ pätee $\left|\frac{n+3}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Aloitetaan tutkimalla lukujonon jäsenten ja ehdotetun raja-arvon välistä etäisyyttä:

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+6}{4n+6} - \frac{2n+3}{4n+6}\right| = \left|\frac{3}{4n+6}\right|$$

Koska lukujen n oletetaan olevan posiitiivisia kokonaislukuja, yllä esitetyn murtolausekkeen osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia. Siispä

$$\left|\frac{3}{4n+6}\right| = \frac{3}{4n+6},$$

mitä voidaan edelleen arvioida ylöspäin pienentämällä nimittäjää, sillä:

$$\frac{3}{4n+6} \leq \frac{3}{4n}.$$

Huomataan yhtäpitävyys:

$$\frac{3}{4n} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{4\varepsilon}$$

Muotoillaan pohdinnan jälkeen vielä varsinainen todistus:
Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnykseksi sellainen kokonaisluku k, että $k \geq \frac{3}{4\varepsilon}$. Nyt kaikille $n > k$ pätee aiemman tarkastelun nojalla:

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+6}{4n+6} - \frac{2n+3}{4n+6}\right| = \left|\frac{3}{4n+6}\right| = \frac{3}{4n+6} \leq \frac{3}{4n} < \frac{3}{4k} \leq \varepsilon$$

Siispä lukujonon raja-arvon määritelmän mukaan pätee $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

A2. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$$

on tosi.

Ratkaisu: Lukujonon raja-arvon märitelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$, joss kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy sellainen kynnys k, että kaikilla $n > k$ pätee $\left|\frac{n+3}{n^2+3} - 0\right| < \varepsilon$.

Huomataan, että:

$$\left|\frac{n+3}{n^2+3} - 0\right| = \left|\frac{n+3}{n^2+3}\right|$$

Koska lukujen n oletetaan olevan positiivisia kokonaislukuja, yllä esitetyn murtolausekkeen osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia. Siispä

$$\left|\frac{n+3}{n^2+3}\right| = \frac{n+3}{n^2+3},$$

mitä voidaan edelleen arvioida ylöspäin pienentämällä nimittäjää ja kasvattamalla osoittajaa, sillä:

$$\frac{n+3}{n^2+3} \leq \frac{n+3}{n^2} \leq \frac{n+3n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

Huomataan yhtäpitävyys:

$$\frac{4}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{4}{\varepsilon}$$

Muotoillaan pohdinnan jälkeen vielä varsinainen todistus:
Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnykseksi sellainen kokonaisluku k, että $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. Nyt kaikille $n > k$ pätee aiemman tarkastelun nojalla:

$$\left|\frac{n+3}{n^2+3} - 0\right| = \left|\frac{n+3}{n^2+3}\right| = \frac{n+3}{n^2+3} \leq \frac{n+3}{n^2} \leq \frac{n+3n}{n^2} = \frac{4}{n} < \frac{4}{k} \leq \varepsilon$$

Siispä lukujonon raja-arvon määritelmän mukaan pätee $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$.

A3. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$$

on epätosi.

Ratkaisu: Lukujonon raja-arvon märitelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$, joss kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy sellainen kynnys k, että kaikilla $n > k$ pätee $\left|\frac{n+3}{2n+3} - 1\right| < \varepsilon$.

Aloitetaan tutkimalla lukujonon jäsenten etäisyyttä ehdotetusta raja-arvosta.

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - 1\right| = \left|\frac{n+3}{2n+3} - \frac{2n+3}{2n+3}\right| = \left|\frac{-n}{2n+3}\right|.$$

Lukujen n oletetaan olevan positiivisa kokonaislukuja, joten $-n < 0$ ja $2n+3 > 0$. Siispä,

$$\left|\frac{-n}{2n+3}\right| = \frac{n}{2n+3}$$

Nyt voimme arvioida etäisyyttä **alaspäin** kasvattamalla nimittäjää, sillä:

$$\frac{n}{2n+3} \geq \frac{n}{2n+3n} = \frac{1}{5}$$

Koska löysimme etäisyydelle nollaa suuremman alarajan, joka ei riipu luvusta n, tiedämme, ettei mikään lukujonon jäsen ole tätä alarajaa lähempänä ehdotettua raja-arvoa.

Olkoon nyt $\varepsilon = \frac{1}{5}$, tiedämme nyt, että kaikilla $n = 1, 2, 3\ldots$ pätee

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - 1\right| \geq \frac{1}{5}.$$

Emme siis voi löytää kynnystä k siten, että $\left|\frac{n+3}{2n+3} - 1\right| < \frac{1}{5}$. Näin ollen väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$$

on epätosi.

A4. Onko väite

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1})=0$$

tosi? Vastaa lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella. (Tehtävässä saa käyttää tietoa, että jokaisella $x\geq 0$ on neliöjuuri ja että epänegatiivisten reaalilukujen joukossa pätee: suuremman luvun neliöjuuri on suurempi. Mitenkähän nämä voisi muuten perustella?)

Ratkaisu: Lukujonon raja-arvon märitelmän mukaan $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1})=0$, joss kaikille $\varepsilon>0$ löytyy sellainen kynnys k, jolla $\left|\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}-0\right|<\varepsilon$, kun $n>k$.

Tutkitaan aluksi lukujonon jäsenten etäisyyttä ehdotetusta raja-arvosta:

$$\left|\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}-0\right|=\left|\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}\right|=\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}$$

Viimeisessä vaiheessa käytettiin tehtävänannossa esitettyä tietoa epänegatiivisten reaalilukujen neliöjuurten suuruusjärjestyksestä: $\sqrt{n^4+n}>\sqrt{n^4+1}$.

Arvioidaan seuraavaksi erotusta ylöspäin kun tämä ensin lavennetaan termillä $\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+1}$ ja pienentämällä sitten nimittäjää ja kasvattamalla osoittajaa:

$$\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}=\frac{n^4+n-n^4-1}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+1}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^4}}=\frac{1}{n}$$

Nyt näemme, että kaikilla $n>\frac{1}{\varepsilon}$ erotus on lukua $\varepsilon>0$ pienempi.

Muotoillaan vielä varsinainen todistus:
Olkoon $\varepsilon>0$. Valitaan kynnys $k\geq\frac{1}{\varepsilon}$. Nyt kaikille $n>k$ pätee aiemman pohdinnan nojalla:

$$\left|\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{k}<\varepsilon$$

Siispä esitetty väite on lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla tosi.

A5. Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (y_n) toteuttavat seuraavat ehdot:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

ja

$$\text{kaikilla } n\in\mathbb{N}_1 \text{ pätee } |y_n|\leq 5.$$

Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

Ratkaisu: Lukujonon raja-arvon märitelmän mukaan $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$, joss kaikille $\varepsilon>0$ löytyy sellainen kynnys k, jolla $|x_ny_n-0|<\varepsilon$, kun $n>k$.

Tutkitaan aluksi lukujonon jäsenten etäisyyttä ehdotetusta raja-arvosta:

$$|x_ny_n-0|=|x_ny_n|=|x_n||y_n|\leq 5|x_n|.$$

Huomataan yhtäpitävyys:

$$5|x_n|<\varepsilon\iff|x_n|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Tiedämme, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, joten positiiviselle luvulle $\frac{\varepsilon}{5}$ löytyy sellainen kynnys k, että kaikilla $n > k$ pätee $|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Pohdinnan jälkeen muotoilemme vielä varsinaisen todistuksen:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnys k siten, että $|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{5}$ kaikilla $n > k$.

Valitsemallamme kynnyksellä k pätee kaikille $n > k$:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq 5|x_n| = 5|x_n - 0| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Siispä lukujonon raja-arvon määritelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.