HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1$$

on tosi.

Ratkaisu: Raja-arvon määritelmän mukaan reaalilukujono (x_n) suppenee kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa jokin "kynnysluku" $k > 0$ siten, että $|x_n - a| < \varepsilon$, kun $n > k$. Tutkitaan etäisyyttä

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| &= \left|\frac{n+1}{n+5} - \frac{n+5}{n+5}\right| \\
&= \left|\frac{n+1-(n+5)}{n+5}\right| \\
&= \left|\frac{-4}{n+5}\right| \\
&= \frac{4}{n+5} \\
&< \frac{4}{n}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Halutaan valita "kynnys" k siten, että

$$\frac{4}{n} < \varepsilon\,,$$

josta saadaan yhtäpitävästi (kertomalla puolittain luvulla n ja jakamalla puolittain luvulla ε), että

$$n > \frac{4}{\varepsilon}\,.$$

Valitaan siis $k \in \mathbb{N}$ sellaiseksi, että $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. (Muista, että saamme itse valita luvun k. Yhtä hyvin olisimme voineet "pelata varman päälle" ja valita vaikkapa $k \geq \frac{5}{\varepsilon}$ tai $k \geq \frac{4}{\varepsilon} + 1$.)

Muotoillaan vielä varsinainen todistus.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $k \in \mathbb{N}$, jolla $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. Nyt kaikilla $n > k$ pätee

$$\left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| < \frac{4}{n} < \frac{4}{k} \leq \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$

Muista, että etsiessämme lukua k oletimme luvusta ε vain, että se on positiivinen. Luku k siis löytyy, olipa ε mikä tahansa positiivinen luku. Toisin sanoen lukujonon raja-arvon määritelmässä vaadittu ehto toteutuu *jokaisella* $\varepsilon > 0$. Siispä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1.$$

L2. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1$$

on tosi.

Ratkaisu: Tutkitaan etäisyyttä

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| &= \left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - \frac{n^2+5}{n^2+5}\right| \\
&= \left|\frac{n^2+1-(n^2+5)}{n^2+5}\right| \\
&= \left|\frac{-4}{n^2+5}\right| \\
&= \frac{4}{n^2+5} \\
&< \frac{4}{n^2} \\
&= \frac{4}{n\cdot n} \\
&\le \frac{4}{1\cdot n}.
\end{aligned}$$

Kuten tehtävässä L1, halutaan valita kynnys k siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$\frac{4}{n} < \varepsilon$$

eli yhtäpitävästi

$$n > \frac{4}{\varepsilon}.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $k \in \mathbb{N}$ siten, että $k \ge \frac{4}{\varepsilon}$. Nyt kaikilla $n > k$ pätee

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| < \frac{4}{n} < \frac{4}{k} \le \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$

Huomaa taas, että löysimme luvun k, vaikka oletimme luvusta ε vain, että se on positiivinen. Niinpä luku k löytyy, olipa ε mikä tahansa positiivinen luku. Toisin sanoen lukujonon raja-arvon määritelmässä vaadittu ehto toteutuu *jokaisella* $\varepsilon > 0$. Siispä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1.$$

L3. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 2$$

on epätosi.

Ratkaisu:

Lähdetään arvioimaan itseisarvolauseketta

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+1}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{n+1}{n+5} - \frac{2(n+5)}{n+5}\right| &= \left|\frac{-n-9}{n+5}\right| \\ = \frac{n+9}{n+5} \geq \frac{n}{n+5n} &= \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Jos 2 olisi raja-arvo, niin itseisarvolauseke pitäisi saada arvioitua pienemmäksi kuin mikä tahansa ε, kunhan n on riittävän suuri. Kuitenkin, jos valitaan $\varepsilon = \frac{1}{6} > 0$, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee edellisen perusteella

$$\left|\frac{n+1}{2n+5} - 2\right| \geq \frac{1}{6} = \varepsilon\,.$$

Ei siis ole olemassa sellaista kynnystä k, jota suuremmilla n itseisarvolauseke olisi pienempi kuin ε.

Löysimme siis luvun ε, jolle *ei löydy* raja-arvon määritelmässä esiintyvää kynnystä k. Siis väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 2$$

on epätosi.

L4. Määritellään lukujono (x_n) asettamalla

$$\frac{n+1}{n+5}$$

kun n on parillinen ja

$$\frac{n^2+1}{n^2+5}$$

kun n on pariton. Suppeneeko jono?

Ratkaisu: Tehtävien L1 ja L2 perusteella tiedetään, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1\,.$$

Molemmat lukujonot pysyvät siis mielivaltaisen lähellä lukua 1, kunhan n kasvaa riittävän suureksi. Koska x_n on "yhdistelmä" samoista lukujonoista, näyttäisi uskottavalta, että myös x_n käyttäytyisi samoin. Luku 1 vaikuttaa siis hyvältä ehdokkaalta lukujonon x_n raja-arvoksi. Osoitetaan täsmällisesti, että se todella on.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen $k_1 \in \mathbb{N}$, että pätee:

$$\text{Jos } n > k_1\,, \text{ niin } \left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Vastaavasti on olemassa sellainen $k_2 \in \mathbb{N}$, että pätee:

$$\text{Jos } n > k_2\,, \text{ niin } \left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

(Huomaa, että tehtävissä L1 ja L2 selvitimme konkreettiset arvot luvuille k_1 ja k_2. Voisimme halutessamme käyttää niitä hyödyksi nytkin, mutta tässä tehtävässä meille riittää tieto niiden olemassaolosta.)

Olkoon nyt $k = max\{k_1, k_2\}$, eli valitaan luvuksi k suurempi luvuista k_1 ja k_2. Olkoon $n > k$. Nyt on kaksi vaihtoehtoa: n on joko parillinen tai pariton. Katsotaan tapaukset erikseen.

Oletetaan ensin, että n on parillinen. Koska $n > k \geq k_1$, niin tällöin pätee

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Oletetaan sitten, että n on pariton. Koska $n > k \geq k_2$, niin nyt pätee

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Molemmissa tapauksissa päästiin samaan tulokseen: kaikilla $n > k$ pätee

$$|x_n - 1| < \varepsilon\,,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1\,,$$

eli jono x_n suppenee.

L5. Oletetaan, että lukujono (y_n) toteuttaa ehdon $|y_n| \leq 3$ kaikilla n. Määritellään lukujono (x_n) asettamalla kaikille n

$$x_n = \frac{y_n}{n}.$$

Osoita, että jono (x_n) suppenee.

Ratkaisu:

Tehtävänannon oletuksista huomataan, että jonon (y_n) arvot ovat aina suljetulla välillä $[-3, 3]$. Toisaalta jonon (x_n) yleisen termin nimittäjässä oleva n kasvaa rajatta indeksin mukana. Tästä voidaan päätellä, että termin x_n arvot lähenevät välttämättä nollaa, kun n kasvaa. Osoitetaan siis, että jono (x_n) suppenee lukuun 0.

Yleisen termin x_n etäisyydelle nollasta pätee

$$|x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{y_n}{n}\right| = \frac{|y_n|}{|n|} = \frac{|y_n|}{n} \leq \frac{3}{n},$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa tehtävänannon oletuksesta. Huomataan lisäksi yhtäpitävyys

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{\varepsilon}\,,$$

missä $\varepsilon > 0$. Näiden tietojen avulla voidaan todistaa suppeneminen.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $k \in \mathbb{N}$, jolla $k \geq \frac{3}{\varepsilon}$. Oletetaan, että $n > k$. Tällöin ylläolevan päättelyn nojalla

$$|x_n - 0| \leq \frac{3}{n} < \frac{3}{k} \leq \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Siispä raja-arvon määritelmän nojalla $(x_n) \to 0$, kun $n \to \infty$, eli jono (x_n) suppenee.