HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Sovelletaan ajatusta, että $|a-b|$ ilmaisee reaalilukujen a ja b välisen etäisyyden.

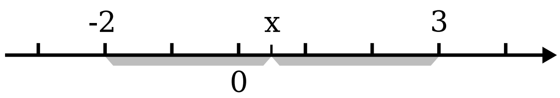
(a) Etsi yhtälön $|x-3| = |x+2|$ ratkaisu tämän näkökulman avulla ratkaisematta yhtälöä varsinaisesti.

(b) Etsi yhtälön $2|x-3| = 3|x+2|$ ratkaisu tämän näkökulman avulla ratkaisematta yhtälöä varsinaisesti.

Tässä tehtävässä vastauksia ei täydy perustella tarkasti.

Ratkaisu:

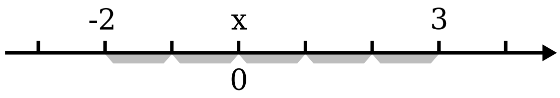
(a) Kun itseisarvo tulkitaan lukujen välisenä etäisyytenä, niin yhtälön vasen puoli $|x-3|$ tarkoittaa lukujen x ja 3 välistä etäisyyttä ja yhtälön oikea puoli $|x+2|$ lukujen x ja -2 välistä etäisyyttä. Yhtälö tarkoittaa siis, että lukujen x ja 3 välinen etäisyys on yhtä suuri kuin lukujen x ja -2 välinen etäisyys. Toisin sanoen x on yhtä kaukana luvuista 3 ja -2 eli x on kyseisten lukujen puolivälissä. Kahden luvun puolivälissä oleva luku saadaan esimerkiksi laskemalla lukujen keskiarvo eli tässä tapauksessa vastaukseksi saadaan $x = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$.



Kuva 1: Tehtävän 1L a-kohdassa luku x on yhtä kaukana -2:sta ja 3:sta.

(b) Kohdan yhtälöä lienee helpointa tulkita, kun itseisarvojen edessä olevat kokonaislukukertoimet jaetaan ensin pois siten, että niiden tilalle saadaan murto-osia. Jaetaan yhtälö siis ensin 2:lla ja sitten 3:lla, jolloin se saadaan muotoon $\frac{1}{3}|x-3| = \frac{1}{2}|x+2|$. Nyt yhtälön voidaan tulkita tarkoittavan, että kolmannes lukujen x ja 3 välisestä etäisyydestä on yhtä suuri kuin puolet lukujen x ja -2 välisestä etäisyydestä. Toisin sanoen lukujen x ja 3 väliin mahtuu täsmälleen kolme sen kokoista palasta, joita lukujen x ja -2 väliin mahtuu kaksi. Nyt koska x:n etäisyys 3:sta on suurempi kuin -2:sta, niin x on joko 3:n ja -2:n välissä tai pienempi kuin -2. Käydään molemmat tapaukset erikseen läpi:

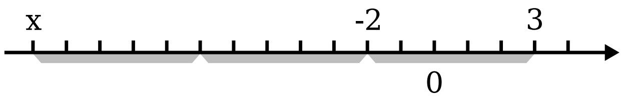
Tapaus 1: Oletetaan, että x on 3:n ja -2:n välissä. Koska lukujen x ja 3 välissä paloja on kolme ja lukujen x ja -2 välissä kaksi, niin lukujen 3 ja -2 välissä paloja on yhteensä $3+2=5$. Nyt siis jos lukujen 3 ja -2 väli jaetaan viiteen yhtä suureen palaan, niin x on kahden tällaisen palan etäisyydellä -2:sta ja kolmen palan etäisyydellä 3:sta. Tällaisen palan pituus on siis $\frac{|3-(-2)|}{5} = 1$ ja kun näitä paloja lisätään 2 kappaletta -2:een, niin saadaan $x = -2 + 2 \cdot 1 = 0$.



Kuva 2: Tehtävän 1L b-kohdassa luku x on kahden palan etäisyydellä -2:sta ja kolmen palan etäisyydellä 3:sta. Tässä on kuvattu tapaus 1 eli tilanne, jossa x on -2:n ja 3:n välissä.

Tapaus 2: Oletetaan, että x on pienempi kuin -2. Nyt x:n ja 3:n välinen etäisyys on x:n ja -2:n välinen etäisyys laskettuna yhteen -2:n ja 3:n välisen etäisyyden kanssa. Koska x on kahden yhtä suuren palan etäisyydellä -2:sta ja kolmen tällaisen palan etäisyydellä 3:sta ja x on pienempi kuin -2, niin -2:n ja 3:n väli sisältää täsmälleen yhden tällaisen palan ja x:n ja -2:n väli sisältää täsmälleen kaksi tällaista palasta. Nyt siis yhden tällaisen palan pituudeksi saadaan lukujen -2 ja 3 välinen etäisyys $|-2-3| = 5$. Lisäksi koska x on kahden tällaisen palan verran -2:ta pienempi, niin x:ksi saadaan $-2-2\cdot 5 = -12$.

Luvulle x ollaan siis saatu kaksi mahdollista arvoa 0 ja -12.



Kuva 3: Tehtävän 1L b-kohdassa luku x on kahden palan etäisyydellä -2:sta ja kolmen palan etäisyydellä 3:sta. Tässä on kuvattu tapaus 2 eli tilanne, jossa x on pienempi kuin -2.

L2. Oletetaan, että $r > 0$. Osoita itseisarvolemman avulla, että ehdot $|x-3| < r$ ja $3-r < x < 3+r$ ovat yhtäpitäviä.

Ratkaisu:

Itseisarvolemman nojalla $|x-3| < r$ ja $-r < x-3 < r$ ovat yhtäpitävät. Lauseke $-r < x-3 < r$ on lyhennysmerkintä kahdelle epäyhtälölle

$$-r < x-3 \quad \text{ja} \quad x-3 < r,$$

joiden huomataan olevan yhtäpitäviä epäyhtälöiden

$$3-r < x \quad \text{ja} \quad x < 3+r$$

kanssa (lisätään molempiin epäyhtälöihin puolittain 3). Toisaalta näille epäyhtälöille voidaan käyttää lyhennysmerkintää $3-r < x < 3+r$. Tämä on ehto, jonka kanssa alkuperäisen epäyhtälön haluttiin osoittaa olevan yhtäpitävä. Siis yhtäpitävyys on nyt todistettu.

L3. Oletetaan, että $|x-2| < 1$. Osoita, että

$$|x^2-4| \leq 5|x-2|.$$

Voiko tässä merkin $\leq$ korvata merkillä $<$?

Ratkaisu:

Tarkastellaan ensin oletusta $|x-2| < 1$. Itseisarvolemman avulla se saadaan muotoon $-1 < x-2 < 1$ ja lisäämällä puolittain 4 muotoon $3 < x+2 < 5$. Nyt koska $3 < x+2$, niin $-5 < x+2$ eli voidaan kirjoittaa $-5 < x+2 < 5$. Käyttämällä itseisarvolemmaa nyt toisinpäin tämä saadaan muotoon $|x+2| < 5$.

Lähdetään nyt saatua ehtoa apuna käyttäen arvioimaan $|x^2-4|$:ää ylöspäin:

$$|x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2| \overset{(*)}{<} 5|x-2|.$$

Kohdassa (*) on hyödynnetty yllä oletuksesta johdettua ehtoa $|x+2| < 5$, mutta tämän voi tehdä vain, kun $|x-2| \neq 0$, sillä jos $|x-2| = 0$, niin $|x+2||x-2| = 0$ ja $5|x-2| = 0$ eli yllä mainittu epäyhtälö $|x+2||x-2| < 5|x-2|$ saisi muodon $0 < 0$, mikä ei pidä paikkansa. Siis tapaus $|x-2| = 0$ on tutkittava erikseen.

Jos nyt siis $|x-2| = 0$, niin $x = 2$ eli todistettavan epäyhtälön vasemmasta puolesta saadaan $|x^2-4| = |2^2-4| = |4-4| = 0$ ja oikeasta puolesta $5|x-2| = 5|2-2| = 5|0| = 0$. Tällöin todistettava epäyhtälö saa muodon $0 \leq 0$ eli se pätee. Nyt lause on siis todistettu kaikissa tapauksissa.

Edellä todettiin, että kun $x = 2$, niin epäyhtälö toteuttaa yhtäsuuruuden, joten merkkiä $\leq$ ei voi korvata merkillä $<$.

L4. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a, että kaikille kokonaisluvuille $n > 0$ pitää paikkansa

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{a}{n}?$$

Ratkaisu:

Luku a löydetään arvioimalla lauseketta

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right|$$

toistuvasti ylöspäin, kunnes se ollaan saatu muotoon $\frac{a}{n}$, missä a on positiivinen reaaliluku. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi seuraavalla tavalla:

Lavennetaan ensin

$$\frac{n+2}{2n+3} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}$$

samannimisiksi, jotta itseisarvomerkkien sisään jää jäljelle vain yksi jakolasku:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2(n+2)}{2(2n+3)} - \frac{1(2n+3)}{2(2n+3)}\right| \\
&= \left|\frac{2n+4}{4n+6} - \frac{2n+3}{4n+6}\right| \\
&= \left|\frac{2n+4-2n-3}{4n+6}\right| = \left|\frac{1}{4n+6}\right|.
\end{aligned}$$

Nyt koska $n > 0$, niin $\frac{1}{4n+6} > 0$, ja koska positiivisen luvun itseisarvo on luku itse, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa eli

$$\left|\frac{1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6}.$$

Seuraavaksi huomataan, että kun positiivisen luvun nimittäjästä vähennetään 6, niin luku kasvaa eli saadaan

$$\frac{1}{4n+6} < \frac{1}{4n}.$$

Ollaan siis saatu

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6} < \frac{1}{4n} = \frac{\frac{1}{4}}{n}.$$

Nyt edellisen nojalla

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\frac{1}{4}}{n}$$

eli $\frac{1}{4}$ kelpaa etsityksi luvuksi a.

L5. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a, että kaikille kokonaisluvuille $n > 2$ pitää paikkansa

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3} - 1\right| \leq \frac{a}{n}?$$

Ratkaisu:

Tämä ratkaistaan samaan tapaan kuin aiempi tehtävä. Nyt ylöspäin arviointi voidaan tehdä esimerkiksi näin:

Lavennetaan taas erotuksen luvut samannimisiksi, jotta itseisarvomerkkien sisään jää vain yksi jakolasku:

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3} - 1\right| = \left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3} - \frac{n^2+3}{n^2+3}\right| = \left|\frac{n^2+n+1-n^2-3}{n^2+3}\right| = \left|\frac{n-2}{n^2+3}\right|.$$

Nyt koska $n > 2$, niin $\frac{n-2}{n^2+3} > 0$, ja koska positiivisen luvun itseisarvo on luku itse, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa eli

$$\left|\frac{n-2}{n^2+3}\right| = \frac{n-2}{n^2+3}.$$

Seuraavaksi huomataan, että kun positiivisen luvun osoittajaan lisätään 2, niin se kasvaa eli saadaan

$$\frac{n-2}{n^2+3} < \frac{n}{n^2+3}.$$

Sitten kun positiivisen luvun nimittäjästä vähentää 3, niin se kasvaa edelleen eli saadaan

$$\frac{n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Nyt kun kaikki saadut tiedot yhdistetään, niin saadaan

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3} - 1\right| = \left|\frac{n-2}{n^2+3}\right| = \frac{n-2}{n^2+3} < \frac{n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Siis luvuksi a kelpaa nyt 1.