HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Arvioidaan murtolausekkeen
$$\frac{2n+3}{4n+5}$$
suuruutta luennoilla esiteltyjen epäyhtälöiden ominaisuuksien avulla. Tehtävän lausekkeessa n on positiivinen kokonaisluku. Etsi positiiviset kokonaisluvut a, b, c ja d, joille kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee
$$\frac{a}{b} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{c}{d}.$$
Kannattaa muistaa, että murtolauseketta voi pienentää esimerkiksi pienentämällä osoittajaa tai kasvattamalla nimittäjää, ja kasvattaa kasvattamalla osoittajaa tai pienentämällä nimittäjää.

Ratkaisu: Käytetään vihjettä ja yritetään kasvattaa/pienentää murtolauseketta sen verran, että saadaan muuttuja n supistettua pois.

Koska $n = 1, 2, 3, \ldots$, hyvin karkea yläraja saadaan esimerkiksi seuraavalla arviolla:
$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+3n}{4n} = \frac{5n}{4n} = \frac{5}{4}$$
Samoin, hyvin karkea alaraja saadaan seuraavalla arviolla:
$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5n} = \frac{2n}{9n} = \frac{2}{9}$$
Näin saadaan eräs vastaus $a = 5,\ b = 4,\ c = 2$ ja $d = 9$.

Tämä ei tietenkään ole ainoa oikea vastaus. Esimerkiksi, arvioita voi tässä tapauksessa hieman parantaa vaikkapa supistamalla n:n sijaan $(n+1)$:
$$\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{2n+2+1}{4n+4+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)+1} \leq \frac{2(n+1)+(n+1)}{4(n+1)} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{2n+2+1}{4n+4+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)+1} \geq \frac{2(n+1)}{4(n+1)+(n+1)} = \frac{2}{5}$$

A2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Lisätään oletus $n > 10$. Paranna edellisen tehtävän arviota. Toisin sanoen, etsi positiiviset kokonaisluvut m, l, p ja q, joille kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n > 10$ pätee
$$\frac{m}{l} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{p}{q}$$
ja joilla $\frac{a}{b} < \frac{m}{l}$ ja $\frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

Ratkaisu: Kuten tehtävässä A1, arvioiden tekemiseksi yritetään supistaa muuttuja n murtolausekkeesta. Osoittajassa on vakiotermi 3 ja nimittäjässä 5. Havaitaan, että kaikilla $n > 10$ pätee
$$3 \leq \frac{1}{3}n \quad \text{ja} \quad 5 \leq \frac{1}{2}n.$$

(Esim. jos $n = 11$, niin $\frac{1}{3}n = \frac{11}{3} \approx 3,7$ ja $\frac{1}{2}n = \frac{11}{2} = 5,5$.)

Nyt, **ehdon** $n > 10$ **ollessa voimassa**, voidaan arvioida:

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+\frac{1}{3}n}{4n} = \frac{2+\frac{1}{3}}{4} = \frac{7}{12} \approx 0,58$$

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+\frac{1}{2}n} = \frac{2}{4+\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \approx 0,44$$

Tällä tavalla saadaan vastaukseksi $p = 7$, $q = 12$, $m = 4$ ja $l = 9$.

Huomaa, että tässäkin tehtävässä on monta oikeaa ratkaisua. Esimerkiksi, näitäkin arvioita voisi vielä parantaa vaikkapa huomaamalla, että kun $n > 10$, niin $3 \leq \frac{3}{11}n$ ja $5 \leq \frac{5}{11}n$ ja arvioimalla murtolausekkeita sitten samoin kuin edellä: Ehdon $n > 10$ ollessa voimassa, pätee

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+\frac{3}{11}n}{4n} = \frac{2+\frac{3}{11}}{4} = \frac{25}{44} \approx 0,57$$

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+\frac{5}{11}n} = \frac{2}{4+\frac{5}{11}} = \frac{22}{49} \approx 0,45$$

Tällä tavalla saadaan vastaukseksi $p = 25$, $q = 44$, $m = 22$ ja $l = 49$.

A3. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku K, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee: jos $3 < x < 4$, niin $x^2 - 9 < K(x-3)$.

Ratkaisu: Huomataan, että $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

Kun $3 < x < 4$, niin $x - 3 > 0$. Nyt kun kasvatamme tekijää $(x+3)$, niin lauseke $(x+3)(x-3)$ kasvaa.

Jos $3 < x < 4$, niin

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) < (4+3)(x-3) = 7(x-3).$$

Vastaukseksi sopii siis esimerkiksi $K = 7$.

A4. Jatketaan lausekkeen x^2 tarkastelua vähän kohdan $x = 3$ oikealla puolella. Oletetaan, että $3 < x < 3 + 7^{-777}$. Mitä voit päätellä edellisen tehtävän tuloksen avulla erotuksen $x^2 - 9$ suuruudesta?

Ratkaisu: Havaitaan, että $3 + 7^{-777} < 4$, joten edellisen tehtävän arvio pätee, kun $K = 7$. Näin ollen, kun $3 < x < 3 + 7^{-777}$, niin voidaan arvioida

$$x^2 - 9 < 7(x-3) < 7(3 + 7^{-777} - 3) = 7^{-776}.$$

A5. Jatketaan lausekkeen x^2 tarkastelua vähän kohdan $x = 3$ oikealla puolella. Sovelletaan tehtävän A3 tulosta.

(a) Etsi sellainen positiivinen reaaliluku δ, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee: jos $3 < x < 3 + \delta$, niin $x^2 - 9 < 7^{-7777}$.

(b) Etsi sellainen positiivinen reaaliluku δ, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee: jos $3 < x < 3 + \delta$, niin $x^2 < 9 + 7^{-7777}$.

Ratkaisu:

(a) Pohdintaa: Jos $0 < \delta < 1$, niin tehtävän A3 perusteella $x^2 - 9 < 7(x-3)$, kun $3 < x < 3 + \delta$. Yksinkertaisempi lauseke $7(x-3)$ toimii siis hieman monimutkaisemman lausekkeen $x^2 - 9$ ylärajana tarkasteltavalla välillä. Tutkitaan milloin tämä hieman yksinkertaisempi lauseke toteuttaa halutun ehdon:

$$7(x-3) < 7^{-7777} \iff x - 3 < 7^{-7778} \iff x < 3 + 7^{-7778}$$

Toisin sanoen, kun $3 < x < 3 + 7^{-7778}$, niin

$$x^2 - 9 < 7(x-3) < 7^{-7777},$$

mistä nähdään, että $\delta = 7^{-7778}$ kelpaa. Kirjoitetaan vielä täsmällinen matemaattinen todistus:

Valitaan $\delta = 7^{-7778}$. Olkoon $3 < x < 3 + \delta$.

Tällöin myös $3 < x < 3 + \delta < 4$, eli tehtävän A3 perusteella $x^2 - 9 < 7(x-3)$. Siis

$$x^2 - 9 < 7(x-3) < 7(3 + \delta - 3) = 7\delta = 7^{-7777},$$

mikä on haluttu tulos.

(b) Tehtävän epäyhtälöstä voidaan helposti huomata, että oikeastaan kyseessä on oleellisesti sama tehtävä kuin kohdassa (a). Siis $\delta = 7^{-7778}$ kelpaa myös tähän kohtaan. Kirjoitetaan vielä täsmällinen matemaattinen todistus.

Valitaan $\delta = 7^{-7778}$. Olkoon $3 < x < 3 + \delta$.

Nyt (a)-kohdan perusteella

$$x^2 - 9 < 7^{-7777},$$

eli

$$x^2 < 9 + 7^{-7777},$$

mikä on haluttu tulos.