**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Raja-arvot, syksy 2016**
**Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotuksia**

**L1.** Arvioidaan murtolausekkeen
$$\frac{3n+1}{n+3}$$
suuruutta luennoilla esiteltyjen epäyhtälöiden ominaisuuksien avulla. (Ne tulevat näkyville myös kurssin moodleen.) Tehtävän lausekkeessa $n$ on positiivinen kokonaisluku. Etsi positiiviset kokonaisluvut $a, b, c$ ja $d$, joille kaikilla positiivisilla kokonailuvuilla $n$ pätee
$$\frac{a}{b} \leq \frac{3n+1}{n+3} \leq \frac{c}{d}.$$
Kannattaa muistaa, että murtolauseketta voi pienentää esimerkiksi pienentämällä osoittajaa tai kasvattamalla nimittäjää, ja kasvattaa kasvattamalla osoittajaa tai pienentämällä nimittäjää.

*Ratkaisu:* Arvioidaan ensin lauseketta ylöspäin kasvattamalla osoittajaa ja pienentämällä nimittäjää
$$\begin{aligned}\frac{3n+1}{n+3} &\leq \frac{3n+n}{n+3}\\ &\leq \frac{4n}{n+3}\\ &\leq \frac{4n}{n}\\ &\leq \frac{4}{1}\end{aligned}$$

Arvioidaan sitten lauseketta alaspäin pienentämällä osoittajaa ja kasvattamalla nimittäjää
$$\begin{aligned}\frac{3n+1}{n+3} &\geq \frac{3n}{n+3}\\ &\geq \frac{3n}{n+3n}\\ &\geq \frac{3n}{4n}\\ &\geq \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Siis
$$\frac{3}{4} \leq \frac{3n+1}{n+3} \leq \frac{4}{1}$$

Siis vastaukseksi käy esimerkiksi $a = 3,\ b = c = 4$ ja $d = 1$.

**L2.** Etsi sellainen positiivinen reaaliluku $K$, että kaikilla reaaliluvuilla $x$ pätee: jos $1 < x < 2$, niin $x^2 - 1 < K(x-1)$.

*Ratkaisu:* Huomataan, että $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Kun $1 < x < 2$, niin $x - 1 > 0$. Nyt kun kasvatamme tekijää $x + 1$, niin lauseke $(x+1)(x-1)$ kasvaa.

Jos $1 < x < 2$, niin

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+1)(x-1) \\ &< (2+1)(x-1) \\ &= 3(x-1) \end{aligned}$$

Siis

$$x^2 - 1 < 3(x-1)$$

Vastaukseksi sopii siis esimerkiksi $K = 3$.

**L3.** Jatketaan lausekkeen $x^2$ tarkastelua vähän kohdan $x = 1$ oikealla puolella. Sovelletaan edellisen tehtävän tulosta.

(a) Etsi sellainen positiivinen reaaliluku $\delta$, että kaikilla reaaliluvuilla $x$ pätee: jos $1 < x < 1 + \delta$, niin $x^2 - 1 < 7^{-777}$.

(b) Etsi sellainen positiivinen reaaliluku $\delta$, että kaikilla reaaliluvuilla $x$ pätee: jos $1 < x < 1 + \delta$, niin $x^2 < 1 + 7^{-777}$.

*Ratkaisu:*

(a) Pohdintaa:
$1 < x < 1 + \delta$ jos ja vain jos $0 < x - 1 < \delta$.
Kun $\delta \leq 1$, niin tehtävän L2 perusteella $x^2 - 1 < 3(x-1)$, kun $1 < x < 1 + \delta$.

Halutaan valita $\delta$ siten, että $\delta \leq 1$ ja kun $0 < x - 1 < \delta$, niin

$$3(x-1) \leq 7^{-777}$$

Tämä pätee, jos ja vain jos

$$x - 1 \leq \frac{7^{-777}}{3}$$

Valitaan siis $\delta$ siten, että $\delta \leq \dfrac{7^{-777}}{3}$. Valitaan esimerkiksi $\delta = 7^{-778}$

Kirjoitetaan vielä formaali todistus siitä, että tällainen $\delta$ tosiaan toteuttaa tehtävänannon.

Todistus:
Valitaan $\delta = 7^{-778}$
Olkoon $1 < x < 1 + \delta$.

Tällöin $1 < x < 1 + 7^{-778} < 2$ eli tehtävän L2 perusteella $x^2 - 1 < 3(x-1)$. Myös $0 < x - 1 < \delta$.
Siis

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &< 3(x-1) \\ &< 3\delta \\ &< 3\frac{7^{-777}}{3} \\ &= 7^{-777} \end{aligned}$$

Siis, kun $\delta = 7^{-778}$, niin kaikilla reaaliluvuilla $x$ pätee: jos $1 < x < 1 + \delta$, niin $x^2 - 1 < 7^{-777}$.

(b) Valitaan $\delta = 7^{-778}$.
Olkoon $1 < x < 1 + \delta$.
Nyt a-kohdan perusteella

$$x^2 - 1 < 7^{-777}$$

eli

$$x^2 < 1 + 7^{-777}$$

Siis, kun $\delta = 7^{-778}$, niin kaikilla reaaliluvuilla $x$ pätee: jos $1 < x < 1 + \delta$, niin $x^2 < 1 + 7^{-777}$.

**L4.** Reaaliluvun $a$ käänteisluku on sellainen reaaliluku $b$, jolle pätee $ab = 1$. Miksei luvulla 0 ole käänteislukua; ts. miksei nollalla saa jakaa?

*Ratkaisu:*

Huomataan ensin, että reaalilukujen kunta-aksioomista, erityisesti osittelulaista seuraa, että kaikilla $b \in \mathbb{R}$ pätee

$$0b = (0+0)b = 0b + 0b.$$

Vähentämällä yhtälöstä luku $0b$ puolittain saadaan, että

$$0b = 0$$

kaikilla reaaliluvuilla $b$.
Erityisesti jos luvulla 0 olisi käänteisluku $b$ reaalilukujen kunnassa pätisi, että

$$0 = 0b = 1.$$

Koska reaalilukujen kunnassa nolla-alkio 0 ja ykkösalkio 1 ovat eri alkiot, ei ylläoleva yhtälö ole tosi. Luvulla 0 ei siis ole käänteislukua.
Käänteisluvulla kertomista voi ajatella myös jakamisena, joten tätä tarkoitetaan sillä kun sanotaan, että 'nollalla ei saa jakaa'.