

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2016

Tehtävät 2 A ja L
12.9. alkavalle viikolle

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Arvioidaan murtolausekkeen

$$\frac{2n+3}{4n+5}$$

suuruutta luennoilla esiteltyjen epäyhtälöiden ominaisuuksien avulla. Tehtävän lausekkeessa n on positiivinen kokonaisluku. Etsi positiiviset kokonaisluvut a, b, c ja d , joille kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$\frac{a}{b} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{c}{d}.$$

Kannattaa muistaa, että murtolauseketta voi pienentää esimerkiksi pienentämällä osoittajaa tai kasvattamalla nimittäjää, ja kasvattaa kasvattamalla osoittajaa tai pienentämällä nimittäjää.

A2 Jatkoa edelliseen tehtävään. Lisätään oletus $n > 10$. Paranna edellisen tehtävän arviota. Toisin sanoen, etsi positiiviset kokonaisluvut k, l, p ja q , joille kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n > 10$ pätee

$$\frac{k}{l} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{p}{q}$$

ja joilla $\frac{a}{b} < \frac{k}{l}$ ja $\frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

A3 Etsi sellainen positiivinen reaaliluku K , että kaikilla reaaliluvuilla x pätee: jos $3 < x < 4$, niin $x^2 - 9 < K(x - 3)$.

A4 Jatketaan lausekkeen x^2 tarkastelua vähän kohdan $x = 3$ oikealla puolella. Oletetaan, että $3 < x < 3 + 7^{-777}$. Mitä voit päätellä edellisen tehtävän tuloksen avulla erotuksen $x^2 - 9$ suuruudesta?

A5 Jatketaan lausekkeen x^2 tarkastelua vähän kohdan $x = 3$ oikealla puolella. Sovelletaan tehtävän A3 tulosta.

(a) Etsi sellainen positiivinen reaaliluku δ , että kaikilla reaaliluvuilla x pätee: jos $3 < x < 3 + \delta$, niin $x^2 - 9 < 7^{-7777}$.

(b) Etsi sellainen positiivinen reaaliluku δ , että kaikilla reaaliluvuilla x pätee: jos $3 < x < 3 + \delta$, niin $x^2 < 9 + 7^{-7777}$.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5

L1 Sovelletaan ajatusta, että $|a - b|$ ilmaisee reaalilukujen a ja b välisen etäisyyden.

(a) Etsi yhtälön $|x - 3| = |x + 2|$ ratkaisu tämän näkökulman avulla ratkaisematta yhtälöä varsinaisesti.

(b) Etsi yhtälön $2|x - 3| = 3|x + 2|$ ratkaisu tämän näkökulman avulla ratkaisematta yhtälöä varsinaisesti.

Tässä tehtävässä vastauksia ei täydy perustella tarkasti.

L2 Oletetaan, että $r > 0$. Osoita itseisarvolemman avulla, että ehdot $|x - 3| < r$ ja $3 - r < x < 3 + r$ ovat yhtäpitäviä.

L3 Oletetaan, että $|x - 2| < 1$. Osoita, että

$$|x^2 - 4| \leq 5|x - 2|.$$

Voiko tässä merkin \leq korvata merkillä $<$?

L4 Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a , että kaikille kokonaisluvuille n pitää paikkansa

$$\left| \frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{a}{n}?$$

L5 Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a , että kaikille kokonaisluvuille $n > 2$ pitää paikkansa

$$\left| \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3} - 1 \right| \leq \frac{a}{n}?$$