HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Todista määritelmään nojautuen seuraavat itseisarvon ominaisuudet:

(a) $|x| \geq 0$,

(b) $|xy| = |x||y|$.

Ratkaisu: (a) Olkoon x reaaliluku. Tällöin pätee täsmälleen yksi seuraavista ehdoista: $x > 0$, $x = 0$ ja $x < 0$. Tutkitaan väitettä $|x| \geq 0$, kaikissa näissä tapauksissa.

(i) Jos $x > 0$, niin itseisarvon määritelmän nojalla pätee $|x| = x$ ja siten $|x| > 0$. Siis pätee myös $|x| \geq 0$.

(ii) Jos $x = 0$, niin itseisarvon määritelmän mukaan pätee $|x| = 0$ ja siten $|x| \geq 0$.

(iii) Jos $x < 0$, niin itseisarvon määritelmän mukaan pätee $|x| = -x$. Koska $x < 0$, niin $-x > 0$, eli $|x| > 0$. Siis pätee myös $|x| \geq 0$.

Siis jokaisessa tapauksessa pätee $|x| \geq 0$, joten kaikilla x pätee $|x| \geq 0$.

(b) Tässä kohdassa täytyy myös käydä läpi useampi tapaus. Olkoon x ja y reaalilukuja.

(i) Oletetaan ensin, että $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, jolloin pätee myös $xy \geq 0$. Itseisarvon määritelmän nojalla nyt pätee $|x| = x$, $|y| = y$ ja $|xy| = xy$, joten pätee myös $|xy| = xy = |x||y|$.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että pätee $x < 0$ ja $y < 0$, jolloin pätee $xy > 0$. Itseisarvon määritelmän mukaan nyt pätee $|x| = -x$, $|y| = -y$ ja $|xy| = xy$, joten pätee myös $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

(iii) Oletetaan vielä, että pätee $x \geq 0$ ja $y < 0$, jolloin pätee $xy \leq 0$. Itseisarvon määritelmän mukaan nyt pätee $|x| = x$, $|y| = -y$ ja $|xy| = -xy$, joten pätee myös $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

Vielä on käsittelemättä tapaus $y \geq 0$ ja $x < 0$. Tämä tapauksen kohdalla todistus on kuitenkin samankaltainen edellisen kohdan todistuksen kanssa, joten todistus voidaan sivuuttaa.

Siis väite pätee kaikissa tapauksissa, joten olemme osoittaneet, että $|xy| = |x||y|$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

A2. Selvitä itseisarvolemman avulla tarkasti

(a) minkä välin muodostavat ne reaaliluvut x, joille pätee $|x - 42| < 7^{-7777}$,

(b) minkä joukon muodostavat ne reaaliluvut x, joille pätee $0 < |x - 42| < 7^{-7777}$.

Ratkaisu: (a) Käytetään itseisarvolemmaa. Saadaan

$$|x - 42| < 7^{-7777} \iff -7^{-7777} < x - 42 < 7^{-7777}.$$

Nyt lisäämällä kaksoisepäyhtälön jokaiseen kohtaan luku 42, ovat epäyhtälöt yhtäpitävät ja saadaan

$$-7^{-7777} < x - 42 < 7^{-7777} \iff 42 - 7^{-7777} < x < 42 + 7^{-7777}.$$

Eli reaaliluvut välillä $42 - 7^{-7777} < x < 42 + 7^{-7777}$ toteuttavat tehtävän epäyhtälön.

(b) Jaetaan epäyhtälö $0 < |x - 42| < 7^{-7777}$ kahteen tutkittavaan osaan $0 < |x - 42|$ ja $|x - 42| < 7^{-7777}$, joita voidaan tutkia erikseen.
(a)-kohdasta nähdään, että $|x - 42| < 7^{-7777} \iff 42 - 7^{-7777} < x < 42 + 7^{-7777}$, joten riittää tutkia $0 < |x - 42|$. Itseisarvon määritelmän nojalla $|x| \geq 0$. Täytyy siis tutkia, milloin $0 = |x - 42|$. Nyt

$$|x - 42| = 0 \iff x - 42 = 0 \iff x = 42.$$

Eli reaaliluvut väleillä $42 - 7^{-7777} < x < 42$ ja $42 < x < 42 + 7^{-7777}$ toteuttavat tehtävän epäyhtälön.

A3. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{a}{n}.$$

Ratkaisu: Luku a löydetään arvioimalla lauseketta

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right|$$

toistuvasti ylöspäin, kunnes se on saatu muotoon $\frac{a}{n}$, missä a on positiivinen reaaliluku. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi seuraavalla tavalla:

Lavennetaan ensin

$$\frac{2n+3}{4n+5} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}$$

samannimisiksi, jotta itseisarvomerkkien sisään jää jäljelle vain yksi jakolasku:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2(2n+3)}{2(4n+5)} - \frac{1(4n+5)}{2(4n+5)}\right| \\ &= \left|\frac{4n+6}{8n+10} - \frac{4n+5}{8n+10}\right| \\ &= \left|\frac{4n+6-4n-5}{8n+10}\right| = \left|\frac{1}{8n+10}\right|.\end{aligned}$$

Nyt koska $n > 0$, niin $\frac{1}{8n+10} > 0$, ja koska positiivisen luvun itseisarvo on luku itse, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa eli

$$\left|\frac{1}{8n+10}\right| = \frac{1}{8n+10}.$$

Seuraavaksi huomataan, että kun positiivisen luvun nimittäjästä vähennetään 10 siten, että nimittäjä säilyy yhä positiivisena, niin luku kasvaa eli saadaan

$$\frac{1}{8n+10} < \frac{1}{8n}.$$

Ollaan siis saatu

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{8n+10}\right| = \frac{1}{8n+10} < \frac{1}{8n} = \frac{\frac{1}{8}}{n}.$$

Nyt edellisen nojalla

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\frac{1}{8}}{n}$$

eli $\frac{1}{8}$ kelpaa luvuksi a.

A4. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku a, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{a}{n}.$$

Ratkaisu: Tämä ratkaistaan samaan tapaan kuin aiempi tehtävä.

Lavennetaan ensin

$$\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{4}$$

samannimisiksi, jotta itseisarvomerkkien sisään jää jäljelle vain yksi jakolasku:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} - \frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4(n^2+2n+3)}{4(4n^2+5)} - \frac{1(4n^2+5)}{4(4n^2+5)}\right| \\
&= \left|\frac{4n^2+8n+12}{16n^2+20} - \frac{4n^2+5}{16n^2+20}\right| \\
&= \left|\frac{4n^2+8n+12-4n^2-5}{16n^2+20}\right| = \left|\frac{8n+7}{16n^2+20}\right|.
\end{aligned}$$

Nyt koska $n > 0$, niin $\frac{8n+7}{16n^2+20} > 0$, ja koska positiivisen luvun itseisarvo on luku itse, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa eli

$$\left|\frac{8n+7}{16n^2+20}\right| = \frac{8n+7}{16n^2+20}.$$

Seuraavaksi huomataan, että kun sieventämämme murtolausekkeen nimittäjästä vähennetään 20, niin murtolauseke kasvaa eli saadaan

$$\frac{8n+7}{16n^2+20} < \frac{8n+7}{16n^2}.$$

Lisäksi huomataan, että voimme kasvattaa murtolauseketta muuttamalla osoittajasta luvun 7 luvuksi $7n$, jolloin saadaan

$$\frac{8n+7}{16n^2} < \frac{8n+7n}{16n^2} = \frac{15n}{16n^2} = \frac{15}{16n}.$$

Ollaan siis saatu

$$\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{8n+7}{16n^2+20}\right| = \frac{8n+7}{16n^2+20} < \frac{15}{16n} = \frac{\frac{15}{16}}{n}.$$

Nyt edellisen nojalla

$$\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} - \frac{1}{4}\right| < \frac{\frac{15}{16}}{n}$$

eli $\frac{15}{16}$ kelpaa luvuksi a.

A5. Merkitään $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Tarkastellaan niitä reaalilukuja x, joille pätee $|x-1| < 1$. Etsi positiivinen reaaliluku K, jolle kaikilla tarkasteltavilla x pätee

$$|f(x) - f(1)| \leq K|x-1|.$$

Voiko tehtävässä korvata merkinnän $\leq$ merkinnällä $<$?

Vihjeitä: Tehtävässä on tarkoitus harjoitella kolmioepäyhtälön soveltamista. TätätŠ varten kannattaa esittää erotus $f(x) - f(1)$ muodossa $(x^3-1)+2(x^2-1)+3(x-1)$. Lisäksi kannattaa soveltaa tietoa $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Ratkaisu: Luku K löydetään arvioimalla lauseketta $|f(x)-f(1)|$ toistuvasti ylöspäin, kunnes se on saatu muotoon $K|x-1|$, missä K on jokin positiivinen reaaliluku. *Tapa 1*

Aloitetaan kuitenkin ryhmittelemällä lauseketta $|f(x) - f(1)|$ ensimmäisen vihjeen avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(1)| &= |x^3 + 2x^2 + 3x + 4 - (1 + 2 + 3 + 4)| = |x^3 + 2x^2 + 3x - 1 - 2 - 3| \\ &= |x^3 - 1 + 2x^2 - 2 + 3x - 3| = |(x^3 - 1) + 2(x^2 - 1) + 3(x - 1)|.\end{aligned}$$

Toisen vihjeen perusteella tiedetään, että $x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)$. Lisäksi tiedetään, että $x^2 = (x-1)(x+1)$. Nyt voimme sieventää lauseketta seuraavasti:

$$\begin{aligned}|(x^3 - 1) + 2(x^2 - 1) + 3(x - 1)| &= |(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1)| \\ &= |(x - 1)((x^2 + x + 1) + 2(x + 1) + 3)| \\ &= |x - 1||(x^2 + x + 1) + (2x + 2) + 3| \\ &= |x - 1||x^2 + 3x + 6|.\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla $|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$, jolloin $x^2 + 2x + 5 > 0$. Siis itseisarvomerkit voidaan poistaa eli

$$|x^2 + 3x + 6||x - 1| = (x^2 + 3x + 6)|x - 1|.$$

Nyt voimme arvioida lauseketta ylöspäin

$$(x^2 + 3x + 6)|x - 1| \leq (2^2 + 3 \cdot 2 + 6)|x - 1| = (4 + 6 + 6)|x - 1| = 16|x - 1|.$$

Ollaan siis saatu

$$\begin{aligned}|f(x) - f(1)| &= |(x^3 - 1) + 2(x^2 - 1) + 3(x - 1)| \\ &= |x^2 + 3x + 6||x - 1| \\ &= (x^2 + 3x + 6)|x - 1| \\ &\leq (2^2 + 3 \cdot 2 + 6)|x - 1| = 16|x - 1|.\end{aligned}$$

Siis luku 16 kelpaa luvuksi K.

Tehtävän ratkaisemiseen on toinenkin tapa, jossa hyödynnetään kolmioepäyhtälöä. *Tapa 2*

Käytetään alkuun samaa vihjettä kuin edelläkin ja sen jälkeen hyödynnetään kolmioepäyhtälöä, jolloin

$$|f(x) - f(1)| = |(x^3 - 1) + 2(x^2 - 1) + 3(x - 1)| \leq |x^3 - 1| + |2(x^2 - 1)| + |3(x - 1)|.$$

Nyt hyödynnetään vihjettä, että $x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)$, jolloin

$$\begin{aligned}|x^3 - 1| + |2(x^2 - 1)| + |3(x - 1)| &= |(x - 1)(x^2 + x + 1)| + |2(x - 1)(x + 1)| + |(x - 1)3| \\ &= |(x - 1)||(x^2 + x + 1)| + |(x - 1)||2(x + 1)| + |(x - 1)||3|.\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla $|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$, jolloin $x^2+x+1 > 0$ ja $x+1 > 0$. Siis itseisarvomerkit voidaan poistaa eli

$$\begin{aligned}
&|(x^2+x+1)||(x-1)| + |2(x+1)||(x-1)| + |3||(x-1)| \\
=&(x^2+x+1)|(x-1)| + |2(x+1)|(x-1) + 3|(x-1)| \\
=&((x^2+x+1) + (2x+2) + 3)|x-1| \\
=&(x^2+3x+6)|x-1|.
\end{aligned}$$

Tästä tehtävä jatkuu samalla tavalla kuin *tapauksessa 1*.

Selvitetään vielä voiko merkinnän $\leq$ korvata merkinnällä $<$. Tutkitaan tapausta, kun $|x-1| = 0$ ja siis $x = 1$. Tällöin tutkittavan yhtälön vasemmasta puolesta saadaan $|f(x) - f(1)| = |f(1) - f(1)| = 0$ ja oikeasta puolesta saadaan
$K|x-1| = K|1-1| = 0$, millä tahansa K:lla. Tällöin yhtälön molemmat puolet ovat yhtäsuuria $|f(x) - f(1)| = 0 = K|x-1|$, joten merkintää $\leq$ ei voida korvata merkinnällä $<$.