HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2016
Harjoitus 7 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+3}.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvosta sekä lukujonojen raja-arvoja koskevia lauseita. Perustele vastauksesi huolellisesti!

Ratkaisu: Muokataan aluksi tutkittavaa lukujonoa tässä tapauksessa hyödyllisempään muotoon

$$\frac{n^2+2}{2n^2+3} = \frac{n^2(1+\frac{2}{n^2})}{n^2(2+\frac{3}{n^2})} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}.$$

Saamme käyttää tietoja, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ja $\lim_{n\to\infty} a = a$, kun a on jokin reaaliluku. Nyt kirjan lauseen 2.2.8 ja edellisten tulosten perusteella seuraavat raja-arvot ovat olemassa:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 2\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 3\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right) = 1+0 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2+0 = 2,$$

Nyt koska

$$2+\frac{3}{n^2} \neq 0 \text{ ja } 2 \neq 0,$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n = 1, 2, 3\ldots$, voidaan edelleen soveltaa lausetta 2.2.8 saaden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

A2. Osoita lukujonon rajatta kasvamisen määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n+1} = \infty.$$

Ratkaisu: Halutaan osoittaa, että kaikilla reaaliluvuilla M on olemassa sellainen luonnollinen luku k siten, että kaikilla $n > k$ pätee

$$\frac{n^2+2}{3n+1} > M.$$

Lähdetään siis ensiksi pienentämään lauseketta.

$$\frac{n^2+2}{3n+1} \geq \frac{n^2+2}{3n+n} = \frac{n^2+2}{4n} \geq \frac{n^2}{4n} = \frac{n}{4}.$$

Haluaisimme, että $\frac{n}{4} > M$. Huomataan, että pätee yhtäpitävyys

$$\frac{n}{4} > M \quad \Longleftrightarrow \quad n > 4M.$$

Valitaan siis luku k sellaiseksi, että sille pätee $k > 4M$.

Todistus:

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan $k > 4M$, missä $k \in \mathbb{N}$. Nyt kaikilla $n > k$ pätee

$$\frac{n^2+2}{3n+1} \geq \frac{n}{4} > \frac{k}{4} > \frac{4M}{4} = M.$$

A3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}.$$

Ratkaisu: Halutaan näyttää, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $0 < |x-2| < \delta$ pätee

$$\left|\frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5}\right| < \varepsilon.$$

Lavennetaan ensin itseisarvojen sisällä olevat murtolausekkeet samannimisiksi:

$$\left|\frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{5(x+2)-4(x+3)}{5(x+3)}\right| = \left|\frac{5x+10-4x-12}{5x+15}\right| = \left|\frac{x-2}{5x+15}\right| = \frac{|x-2|}{|5x+15|}.$$

Lisäksi itseisarvo jaettiin erikseen osoittajaan ja nimittäjään. Funktion käytöksellä on raja-arvon kannalta merkitystä vain tarkasteltavan pisteen (tässä tapauksessa $x = 2$) lähistöllä, sillä nyt pohditaan, että kun x lähestyy lukua 2, niin lähestyykö $\frac{x+2}{x+3}$ lukua $\frac{4}{5}$. Voidaan siis rajoittua tarkastelemaan vain luvun 2 lähistöä. Muuttuja x kannattaa nyt rajoittaa maksimissaan 1:n etäisyydelle luvusta 2.

Tehdäään siis lisäoletus, että $|x-2| < 1$, jolloin saadaan yhtäpitävästi $1 < x < 3$. Nyt x on positiivinen, joten murtolausekkeen nimittäjästä saadaan poistettua itseisarvomerkit ja lauseketta saadaan arvioitua ylöspäin:

$$\frac{|x-2|}{|5x+15|} = \frac{|x-2|}{5x+15} \leq \frac{|x-2|}{15}.$$

Jos tämä saadaan pienemmäksi kuin ε, niin alkuperäinen lausekekin on sitä pienempi eli tarkastellaan epäyhtälöä $\frac{|x-2|}{15} < \varepsilon$. Tämä saadaan kertomalla puolittain 15:llä muotoon $|x-2| < 15\varepsilon$. Nyt siis halutaan, että tämä pätee, kun $0 < |x-2| < \delta$. Luku δ on siis valittava sellaiseksi, että sille pätee $\delta \leq 15\varepsilon$.

Teimme edellä lisäoletuksen, että $|x-2| < 1$. Tällöin meidän on valittava luku δ sillä tavalla, että pätee $\delta \leq 1$. Valitaan nyt siis sellainen δ, että molemmat ehdoista toteutuvat.

Todistus:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{15\varepsilon, 1\}$, jolle pätee $0 < |x-2| < \delta$. Nyt

$$\left|\frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5}\right| \leq \frac{|x-2|}{15} < \frac{\delta}{15} \leq \frac{15\varepsilon}{15} = \varepsilon$$

A4. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), missä $x_1 = 2$ ja kaikilla $n = 1, 2, \dots$ pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1).$$

(a) Osoita, että jono on vähenevä (eli laskeva) ja, että 1 on sen alaraja. (Kannattaa huomata, että $\sqrt{a} < a$ kun $1 < a$.)

(b) Osoita, että jono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

Ratkaisu:

(a) Osoitetaan ensiksi induktiolla, että lukujonon (x_n) jäsenet ovat aina suurempaa tai yhtäsuurta kuin luku 1 kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Alkuaskel: väite pätee, kun $n = 1$, sillä $x_1 = 2 \geq 1$.

Induktioaskel: oletetaan, että väite pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$, siis $x_k \geq 1$. Tällöin väite pätee myös kun $n = k + 1$: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_k} + 1) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1} + 1) = 1$.

Lukujono (x_n) on siis aina suurempaa kuin 1, joten se on alhaalta rajoitettu ja sen alaraja on 1.

Osoitetaan seuraavaksi, että lukujono on vähenevä. Tämä voidaan osoittaa näyttämällä, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $x_n - x_{n+1} \geq 0$.

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1) = \frac{2x_n - (\sqrt{x_n} + 1}{2}).$$

Tiedetään, että $\sqrt{a} \leq a$ kaikilla $a \geq 1$. Tällöin voimme arvioida yllä olevaa lauseketta

$$\frac{2x_n - (\sqrt{x_n} + 1)}{2} \geq \frac{2\sqrt{x_n} - \sqrt{x_n} - 1}{2} = \frac{\sqrt{x_n} - 1}{2}.$$

Koska $x_n \geq 1$, niin $\sqrt{x_n} \geq 1$. Tällöin $\frac{\sqrt{x_n}-1}{2} \geq 0$.

Nyt on osoitettu, että x_n on alhaalta rajoitettu ja vähenevä.

(b) Tehdään alkuun muutamia huomioita:

i) Edellisen kohdan perusteella tiedämme, että lukujono (x_n) on alhaalta rajoitettu ja vähenevä, joten lauseen 2.3.9 perusteella se suppenee. Tällöin $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, missä a on jokin reaaliluku.

ii) Kurssin aikaisempien tietojen pohjalta tiedämme myös, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

iii) Lauseen 2.2.8 ja kurssin aikaisempien tietojen perusteella

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1) \to \frac{1}{2}(\sqrt{a} + 1)$$

iv) Yhtäsuuruus säilyy rajalla, eli

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1)$$

Saamme siis kysytyn raja-arvon ratkaisemalla seuraavan yhtälön

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + 1) \quad \Longrightarrow \quad 2a = \sqrt{a} + 1 \quad \Longrightarrow \quad 2a - 1 = \sqrt{a}$$
$$\Longrightarrow \quad (2a - 1)^2 = a \quad \Longrightarrow \quad 4a^2 - 5a + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (4a - 1)(a - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1 \quad \text{tai} \quad a = \frac{1}{4}$$

Arvo $a = \frac{1}{4}$ voidaan hylätä, koska edellä osoitettiin, että $x_n \geq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Eli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

A5. Osoita raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella, että yhtälöllä $f(x) = x^2 + 3x + 4$ määritelty funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva kohdassa $x = 1$. (Muista, että jatkuvuus tarkoittaa sitä, että funktion arvo on sen raja-arvo.)

Ratkaisu:

Halutaan siis osoittaa, että $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Tällöin tulee näyttää, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $|x - 1| < \delta$ pätee

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

Aloitetaan tutkimalla itseisarvoissa olevaa erotusta

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &= |x^2 + 3x + 4 - (1^2 + 3 \cdot 1 + 4)| \\
&= |x^2 + 3x + 4 - 8| \\
&= |x^2 + 3x - 4| \\
&= |(x + 4)(x - 1)| \\
&= |x + 4||x - 1|
\end{aligned}$$

Funktion käytöksellä on raja-arvon kannalta merkitystä vain tarkasteltavan pisteen (tässä tapauksessa $x = 1$) lähistöllä, sillä nyt pohditaan, että kun x lähestyy lukua 1, niin lähestyykö $f(x)$ lukua $f(1)$. Voidaan siis rajoittua tarkastelemaan vain luvun 1 lähistöä. Muuttuja x kannattaa nyt rajoittaa esimerkiksi 1:n etäisyydelle luvusta 1.

Tehdäään siis lisäoletus, että $|x - 1| < 1$, jolloin saadaan yhtäpitävästi
$0 < x < 2$. Nyt x on positiivinen, joten tulon toisesta tekijästä saadaan poistettua itseisarvomerkit ja lauseketta saadaan arvioitua ylöspäin:

$$|x + 4||x - 1| = (x + 4)|x - 1| \leq (2 + 4)|x - 1| = 6|x - 1|$$

Jos tämä saadaan pienemmäksi kuin ε, niin alkuperäinen lausekekin on sitä pienempi eli tarkastellaan epäyhtälöä $6|x - 1| < \varepsilon$, mikä on yhtäpitävästi $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{6}$. Nyt siis halutaan, että tämä pätee, kun $0 < |x - 1| < \delta$. Luku δ voidaan siis valita sellaiseksi, että sille pätee $\delta \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

Teimme edellä lisäoletuksen, että $|x - 1| < 1$. Tällöin meidän on valittava luku δ sillä tavalla, että pätee $\delta \leq 1$. Valitaan nyt siis sellainen δ, että molemmat ehdoista toteutuvat.

Todistus:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$. Olkoon $0 < |x - 1| < \delta$ Nyt

$$|f(x) - f(1)| = |x^2 + 3x - 4| = (x + 4)|x - 1| \leq 6|x - 1| < 6 \cdot \delta \leq 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$