# Johdatus lineaarialgebraan
## Osa II

Lotta Oinonen, Johanna Rämö

30. lokakuuta 2016

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

# Sisältö

# 15 Vektoriavaruus

Kurssin ensimmäisessä osassa käsiteltiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Nyt määritelemme abstraktimmat avaruuden ja vektorin käsitteet, jotka ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ja sen vektoreiden yleistyksiä. Tästä lähin vektori ei tarkoita enää pelkästään avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiota, vaan sanalle annetaan yleisempi merkitys.

Lähtökohtana ovat lauseessa 2.5 esitetyt vektorien laskusäännöt. Mitä tahansa otuksia, jotka toteuttavat nämä laskusäännöt, kutsutaan vektoreiksi. (Tällaista määritelmää kutsutaan *aksiomaattiseksi*.) Esimerkiksi matriiseja, polynomeja ja funktioita voidaan ajatella vektoreina kuten tulemme esimerkeissä näkemään.

**Määritelmä 15.1.** Oletetaan, että joukossa $V$ on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa $V$ kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

*Huom. 1.* Vektoriavaruuden määritelmän alussa vaaditaan, että yhteenlasku ja skalaarikertolasku on määritelty joukossa $V$. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $\bar{v}$, $\bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin täytyy päteä $\bar{v} + \bar{w} \in V$ ja $a\bar{v} \in V$.

*Huom. 2.* Vektoriavaruuden määritelmässä yhteenlaskumerkkiä käytetään kahdessa eri tarkoituksessa. Esimerkiksi kohdassa 6 yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella merkki symboloi reaalilukujen yhteenlaskua ja oikealla puolella vektorien yhteenlaskua. Sen, kumpi laskutoimitus on kulloinkin kyseessä, pystyy päättelemään yhteenlaskettavista. Jos yhteenlaskumerkki on kahden vektorin välissä, kyseessä on vektorien yhteenlasku, ja jos se on kahden reaaliluvun välissä, kyseessä on reaalilukujen yhteenlasku. Samalla tavalla määritelmässä on kahdenlaista kertolaskua: reaalilukujen kertolaskua ja skalaarikertolaskua. Asiayhteydestä pystyy päättelemään, kumpi kertolasku on kyseessä. Tähän palataan esimerkissä 15.4.

Skalaari tarkoittaa tällä kurssilla reaalilukua, sillä käsittelemme reaalikertoimisia vektoriavaruuksia. Kompleksikertoimisilla vektoriavaruuksilla skalaarit ovat kompleksilukuja. Periaatteessa skalaarit voivat olla minkä tahansa *kunnan* alkioita. (Kunnista kerrotaan lisää algebran kursseilla.)

Tarpeen tullen vektoriavaruuden $V$ nollavektoria voidaan merkitä $\bar{0}_V$. Tällöin ei tule sekaannusta siitä, minkä vektoriavaruuden nollavektorista on kyse.

**Esimerkki 15.2.** Kaikki vektoriavaruuden määritelmän ehdot pätevät lauseen 2.5 perusteella avaruuden $\mathbb{R}^n$ yhteenlaskulle ja skalaarikertolaskulle. Siten $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus. Vektoriavaruuden käsite siis tosiaan yleistää avaruutta $\mathbb{R}^n$.

Myös reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on reaalilukujen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna reaalilukujen kertolasku.

**Esimerkki 15.3.** Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla (reaaliluvulla kertominen) ei ole vektoriavaruus. Tämä johtuu siitä, että skalaarikertolasku ei ole määritelty joukossa $\mathbb{Z}$. Esimerkiksi $0{,}5 \in \mathbb{R}$ ja $3 \in \mathbb{Z}$, mutta $0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \notin \mathbb{Z}$. Skalaarikertolaskun tulos ei siis välttämättä ole joukossa $\mathbb{Z}$.

Kuten jo mainittiin, määritelmä 15.1 antaa uuden merkityksen sanalle vektori. Vektori ei ole enää välttämättä muotoa $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oleva avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkio. Se on mikä tahansa otus, joka toteuttaa määritelmän ehdot. Määritelmä ei myöskään kerro, miltä yhteenlasku ja skalaarikertolasku näyttävät. Ne saattavat olla tuttuja laskutoimituksia, mutta myös jotain aivan muuta.

**Esimerkki 15.4.** Matriiseja voidaan ajatella vektoreina. Matriiseja voidaan nimittäin laskea yhteen ja niitä voidaan kertoa reaaliluvuilla, ja lisäksi kaikki vektoriavaruuden ehdot toteutuvat. Tutkitaan tätä hieman tarkemmin. Oletetaan, että $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$. Tällöin seuraavat säännöt pätevät $m \times n$-matriiseille $A$, $B$ ja $C$ sekä reaaliluvuille $a$ ja $b$:

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + O = A$
4) $A + (-1)A = O$
5) $a(A + B) = aA + aB$
6) $(a + b)A = aA + bA$
7) $(ab)A = a(bA)$
8) $1A = A$.

(Osa näistä ehdoista on esittty lauseessa 9.3 ja loppujen todistaminen on suoraviivaista.) Siten kaikkien $m \times n$ -matriisien joukko $\mathbb{R}^{m \times n}$ on vektoriavaruus, ja matriiseja voidaan kutsua vektoreiksi uuden määritelmämme mukaan. Nollavektori on nollamatriisi $O$, ja matriisin vastavektori saadaan muuttamalla kaikki matriisin alkiot vastaluvuikseen.

Huomaa, että tässä vektoriavaruudessa yhteenlaskumerkkiä käytetään kahdessa eri merkityksessä. Esimerkiksi lausekkeessa $(a + b)A$ yhteenlasku on reaalilukujen yhteenlaskua ja lausekkeessa $aA + bA$ matriisien yhteenlaskua. Lisäksi vektoriavaruudessa esiintyy kahta erilaista kertolaskua. Esimerkiksi merkinnässä $aA$ on kyseessä skalaarikertolasku ja merkinnässä $ab$ reaalilukujen kertolasku.

**Esimerkki 15.5.** Myös polynomit muodostavat vektoriavaruuksia. Reaalikertoiminen *polynomi* on muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

oleva summa, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Lukuja $a_n, \ldots, a_0$ kutsutaan polynomin *kertoimiksi* ja symbolia $x$ polynomin *tuntemattomaksi.* Summattavat $a_i x^i$ ovat polynomin *termejä.*

Kaksi polynomia ovat samat, jos ja vain jos niiden toisiaan vastaavissa termeissä on samat kertoimet. Jos jonkin termin kerroin on nolla, termi voidaan jättää kirjoittamatta. Lisäksi termien järjestystä polynomilausekkeessa saa muuttaa. Näin ollen esimerkiksi polynomit $3x^3 - 2x^2 + 0x + 2$ ja $2 - 2x^2 + 3x^3$ ovat samoja. Polynomit $-2x^4 - x + 5$ ja $-2x^4 - x - 5$ puolestaan eivät ole samoja.

Polynomeille voidaan määritellä yhteenlasku, jossa toisiaan vastaavien termien kertoimet lasketaan yhteen. Esimerkiksi polynomien $p = 3x^2 - 4x + 10$ ja $q = -2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x$ summa on polynomi

$$p + q = -2x^5 - x^3 + 8x^2 + 10.$$

Skalaarikertolaskussa puolestaan kukin polynomin kerroin kerrotaan reaaliluvulla. Esimerkiksi polynomi $(-3)p$ saadaan kertomalla kaikki polynomin $p$ kertoimet luvulla $-3$:

$$(-3)p = -9x^2 + 12x - 30.$$

Voidaan osoittaa, että reaalikertoimisten polynomien joukko muodostaa vektoriavaruuden. Tätä vektoriavaruutta kutsutaan polynomiavaruudeksi, ja sitä merkitään symbolilla $\mathcal{P}$.

Seuraavaksi ryhdytään tutkimaan kuvauksien eli funktioiden muodostamia vektoriavaruuksia. Sitä ennen on kuitenkin käytävä läpi muutama kuvauksiin liittyvä merkintä. Eräs esimerkki kuvauksesta on $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Huomaa, että kuvausta määriteltäessä merkintä $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on oleellinen, eikä sitä saa jätttää pois. Se kertoo kuvauksen lähtö- ja maalijoukon. Jos kirjoitetaan pelkästään $f(x) = x^3 - 2x + 1$, tarkoitetaan kuvauksen $f$ arvoa jossakin yksittäisessä pisteessä $x$. Samalla tavalla on tehtävä ero merkintöjen $f$ ja $f(x)$ välillä. Ensimmäinen tarkoittaa kuvausta ja toinen kuvauksen arvoa pisteessä $x$. Vaihtoehtoinen merkitsemistapa kuvaukselle $f$ on $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 2x + 1$.

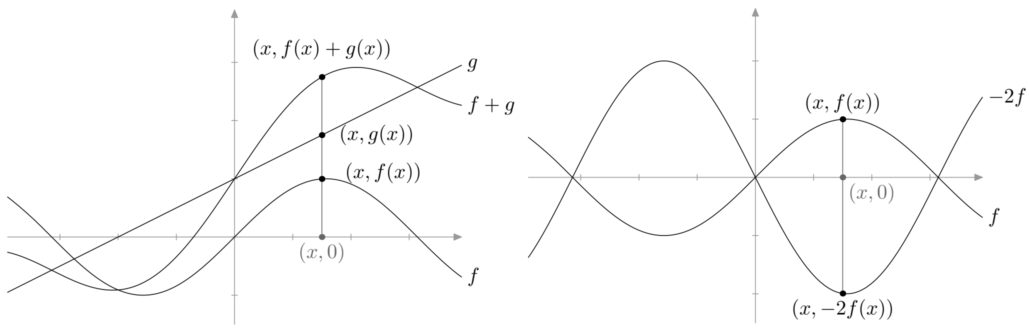
**Esimerkki 15.6.** Vektorit voivat olla myös kuvauksia eli funktioita. Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien kuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. Jos $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin kuvaukset $f + g$ ja $af$ määritellään seuraavasti:

$$f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{ja} \quad af\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto af(x).$$

Sanotaan, että funktioiden laskutoimitukset on tällöin määritelty *pisteittäin.*

Tarkastellaan esimerkiksi funktioita $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0{,}5x + 1$. Nyt funktiot $f + g$ ja $(-2)f$ näyttävät seuraavilta:

$$f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x + 0{,}5x + 1 \quad \text{ja} \quad (-2)f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2\sin x.$$




Kuva 15.47: Funktiot $f$ ja $g$ sekä niiden summa $f+g$ ja skalaarimonikerta $(-2)f$.

Joukko $\mathcal{F}$, jossa yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään pisteittäin, on vektoriavaruus. Tämä osoitetaan käymällä läpi vektoriavaruuden määritelmän ehdot. Seuraavassa osoitetaan osa ehdoista. Loppujen ehtojen tarkistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

1) Oletetaan, että $f, g \in \mathcal{F}$, ja osoitetaan, että $f+g = g+f$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten yhteenlaskun määritelmän mukaan

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{ja} \quad (g+f)(x) = g(x) + f(x).$$

Kuvausten $f$ ja $g$ arvot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat reaalilukuja, joten $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$. Näin ollen

$$(f+g)(x) = (g+f)(x).$$

Kuvauksilla $f+g$ ja $g+f$ on siis samat arvot, joten ne ovat sama kuvaus. Toisin sanoen

$$f+g = g+f.$$

3) Osoitetaan, että nollavektoriksi kelpaa vakiokuvaus $\bar{0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $\bar{0}(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $g \in \mathcal{F}$, ja osoitetaan, että $g + \bar{0} = g$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten yhteenlaskun määritelmän mukaan

$$(g+\bar{0})(x) = g(x) + \bar{0}(x) = g(x) + 0 = g(x)\,.$$

Kuvauksilla $g+\bar{0}$ ja $g$ on siis samat arvot, joten $g+\bar{0} = g$.

4) Osoitetaan, että kuvauksen $g \in \mathcal{F}$ vastavektoriksi kelpaa kuvaus $-g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka määritellään asettamalla $x \mapsto -g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan siis, että $g+(-g) = \bar{0}$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten yhteenlaskun määritelmän mukaan

$$(g+(-g))(x) = g(x) + (-g)(x) = g(x) + (-g(x)) = 0 = \bar{0}(x).$$

Kuvauksilla $g+(-g)$ ja $\bar{0}$ on siis samat arvot, joten $g+(-g) = \bar{0}$.

6) Oletetaan, että $f \in \mathcal{F}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, ja osoitetaan, että $(a+b)f = af + bf$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten skalaarikertolaskun ja yhteenlaskun määritelmien mukaan

$$((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) \text{ ja}$$
$$(af+bf)(x) = (af)(x) + (bf)(x) = af(x) + bf(x).$$

Kuvauksen $f$ arvo $f(x)$ on reaaliluku, joten $(a+b)f(x) = af(x) + bf(x)$. Näin ollen

$$((a+b)f)(x) = (af+bf)(x).$$

Kuvauksilla $(a+b)f$ ja $af+bf$ on siis samat arvot, joten $(a+b)f = af+bf$.

Jonkin joukon yhteenlasku ja skalaarikertolasku voidaan myös määritellä itse keksityllä tavalla. Toisinaan näin saadaan aikaan vektoriavaruuksia, toisinaan taas ei.

**Esimerkki 15.7.** Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos $x, y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ ja } \quad c \odot x = x^c.$$

Esimerkiksi $4 \oplus 3 = 4 \cdot 3 = 12$ ja $0{,}5 \odot 4 = 4^{0{,}5} = 2$.

Voidaan osoittaa, että joukko $\mathbb{R}_+$ yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ varustettuna on vektoriavaruus. Todistetaan vektoriavaruuden määritelmän ehdot 1 ja 5 ja jätetään loput harjoitustehtäviksi.

1. Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}_+$. Koska reaalilukujen kertolasku on vaihdannainen, saadaan $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$. Siten ehto 1 toteutuu.

5. Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}_+$ ja $a \in \mathbb{R}$. Reaalilukujen potenssien ominaisuuksien perusteella pätee $a \odot (x \oplus y) = (xy)^a = x^a y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$. Siten ehto 5 toteutuu.

**Esimerkki 15.8.** Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin $a * (v_1, v_2) = (av_1, 0)$. Osoitetaan, että joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $+$ ja skalaarikertolaskulla $*$ ei ole vektoriavaruus.

Havaitaan, että esimerkiksi $1 * (5,9) = (5,0)$. Näin ollen $1 * (5,9) \neq (5,9)$, joten vektoriavaruuden määritelmän ehto (8) ei täyty.

**Lause 15.9.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus. Tällöin*

*a) nollavektoreita on täsmälleen yksi.*

*b) jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on täsmälleen yksi vastavektori.*

*Todistus.* a) Vektoriavaruuden määritelmä takaa, että ainakin yksi nollavektori on olemassa. Oletetaan, että vektoriavaruudessa $V$ on ainakin kaksi nollavektoria, $\bar{0}$ ja $\bar{0}'$. Nyt siis pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ ja $\bar{v} + \bar{0}' = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$. Tarkastellaan nyt vektoria $\bar{a} = \bar{0} + \bar{0}'$. Ensinnäkin pätee $\bar{a} = \bar{0}' + \bar{0} = \bar{0}'$, sillä $\bar{0}$ on nollavektori. Toisaalta pätee myös $\bar{a} = \bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}$, sillä $\bar{0}'$ on nollavektori. Näin on osoitettu, että $\bar{0} = \bar{0}'$.

b) Oletetaan, että $\bar{v} \in V$. Oletetaan lisäksi, että $\bar{u}$ ja $\bar{w}$ ovat kumpikin vektorin $\bar{v}$ vastavektoreita eli $\bar{v} + \bar{u} = \bar{0}$ ja $\bar{v} + \bar{w} = \bar{0}$. Tällöin

$$\bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = (\bar{v} + \bar{u}) + \bar{w} = \bar{0} + \bar{w} = \bar{w}. \qquad \square$$

**Lause 15.10.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$, $a \in \mathbb{R}$. Tällöin*

*a)* $0\bar{v} = \bar{0}$

*b)* $a\bar{0} = \bar{0}$

*c)* $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$

*d) jos $a\bar{v} = \bar{0}$, niin $a = 0$ tai $\bar{v} = \bar{0}$ (tulon nollasääntö).*

*Todistus.* Osoitetaan kohdat b) ja d) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi.

b) Käyttämällä vektoriavaruuden määritelmän ehtoja 3 ja 5 saadaan pääteltyä, että

$$a\bar{0} = a(\bar{0} + \bar{0}) = a\bar{0} + a\bar{0}.$$

Vektoriavaruuden määritelmän ehdon 4 mukaan on olemassa vastavektori $-a\bar{0}$. Lisäämällä se saadun yhtälön molemmille puolille saadaan

$$a\bar{0} + (-a\bar{0}) = (a\bar{0} + a\bar{0}) + (-a\bar{0}).$$

Käyttämällä määritelmän ehtoja 3 ja 2 saadaan

$$\bar{0} = a\bar{0} + (a\bar{0} + (-a\bar{0}))$$

ja edelleen $\bar{0} = a\bar{0}$.

d) Oletetaan, että $a\bar{v} = \bar{0}$. On osoitettava, että tästä seuraa $a = 0$ tai $\bar{v} = \bar{0}$. Tutkitaan kahta tapausta. Oletetaan ensin, että $a \neq 0$. Tällöin on olemassa käänteisluku $1/a$, ja voimme kertoa yhtälön $a\bar{v} = \bar{0}$ molemmat puolet tällä käänteisluvulla. Näin saadaan yhtälö $(1/a)(a\bar{v}) = (1/a)\bar{0}$. Tämän yhtälön vasen puoli on

$$\frac{1}{a}(a\bar{v}) = \left(\frac{1}{a}a\right)\bar{v} = 1\bar{v} = \bar{v}.$$

Oikea puolelle pätee puolestaan b-kohdan perusteella $(1/a)\bar{0} = \bar{0}$. Näin ollen $\bar{v} = \bar{0}$, joten väite pätee silloin, kun $a \neq 0$. Jos taas $a = 0$, on selvää, että väite pätee. □

Edellinen lause osoittaa, että avaruudesta $\mathbb{R}^n$ tutut laskusäännöt pätevät myös yleisemmissä vektoriavaruuksissa. Myös erotuksen ja lineaarikombinaation käsitteet voidaan määritellä tutulla tavalla.

**Määritelmä 15.11.** Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus ja $\bar{v}$, $\bar{w} \in V$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* $\bar{v} - \bar{w}$ tarkoittaa summaa $\bar{v} + (-\bar{w})$.

**Määritelmä 15.12.** Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in V$. Vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ *lineaarikombinaatio* on vektori

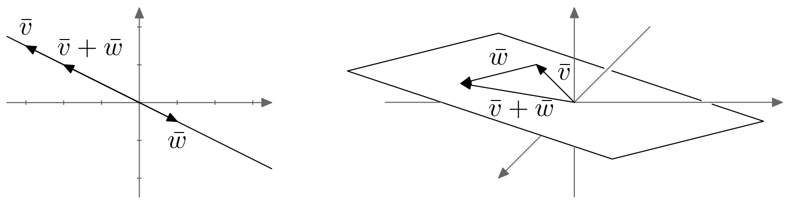
$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k,$$

missä $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

# 16 Aliavaruus

Kurssin ensimmäisessä osassa määriteltiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien virittämä aliavaruus. Tässä luvussa esitellään yleisempi aliavaruuden käsite.

Esimerkiksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia. Ne ovat tavallaan pieniä avaruuksia avaruuden $\mathbb{R}^3$ sisässä. Suorat muistuttavat avaruutta $\mathbb{R}$ ja tasot avaruutta $\mathbb{R}^2$. Oleellista on se, että origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat *suljettuja* avaruuden $\mathbb{R}^3$ yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun suhteen: Jos vaikkapa origon kautta kulkevalta suoralta otetaan kaksi pistettä, niiden summa on suoralla. Jos suoran pistettä kerrotaan reaaliluvulla, tulos on suoran alkio. Muut suorat kuin ne, jotka kulkevat origon kautta, eivät toteuta näitä ehtoja (ks. esim. 7.8).




Kuva 16.48: Esimerkiksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia. Ne ovat suljettuja yhteenlaskun (kuvassa) ja skalaarikertolaskun suhteen.

Edellä mainituista ehdoista syntyy yleinen aliavaruuden määritelmä.

**Määritelmä 16.1.** Olkoon $V$ vektoriavaruus. Sen osajoukko $W$ on vektoriavaruuden $V$ *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $\bar{w}+\bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

c) $\bar{0} \in W$.

*Huom.* Vektoriavaruuden $V$ aliavaruudessa on käytössä sama laskutoimitus kuin itse vektoriavaruudessa $V$.

Lauseen 7.9 nojalla avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus. Uusi aliavaruuden määritelmä yleistää siten vanhaa määritelmää.

**Esimerkki 16.2.** Osoitetaan, että joukko $W = \{(a,b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Joukko $W$ muodostuu siis sellaisista vektoreista, joiden ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat.

Joukko $W$ on määritelmänsä mukaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko. Oletetaan, että $\bar{w}$, $\bar{u} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{w} = (a,b,a)$ ja $\bar{u} = (c,d,c)$ joillakin reaaliluvuilla $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

a) Huomataan, että $\bar{w}+\bar{u} = (a+c, b+d, a+c)$. Koska summavektorin ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat, se toteutttaa joukon $W$ määritelmässä mainitun ehdon. Siten $\bar{w}+\bar{u} \in W$.

b) Nähdään, että $r\bar{w} = (ra, rb, ra)$. Vektorin $r\bar{w}$ ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat, joten se toteuttaa joukon $W$ määritelmässä mainitun ehdon. Siis $r\bar{w} \in W$.

c) Nollavektori $(0, 0, 0)$ on joukon $W$ alkio, sillä sen ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat.

Siten $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

**Esimerkki 16.3.** Tarkastellaan $n \times n$-matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{n\times n}$. Olkoon $W$ symmetristen $n \times n$-matriisien joukko. Toisin sanottuna $W = \{C \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid C^\top = C\}$. Osoitetaan, että $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ aliavaruus.

Ensinnäkin $W$ on määritelmänsä mukaan joukon $\mathbb{R}^{n\times n}$ osajoukko. Oletetaan, että $A$, $B \in W$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin $A^\top = A$ ja $B^\top = B$.

a) Transpoosin laskusääntöjen nojalla $(A + B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$, joten $A + B \in W$.

b) Edelleen transpoosin laskusääntöjen nojalla $(cA)^\top = cA^\top = cA$, joten $cA \in W$.

c) Nollavektori on nollamatriisi $O$. Sille pätee $O^\top = O$, joten $O \in W$.

Näin ollen $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ aliavaruus.

**Esimerkki 16.4.** Tutkitaan, onko joukko

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Havaitaan, että nollavektori eli nollamatriisi

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ei ole joukossa $W$, sillä ei ole olemassa sellaista reaalilukua $a$, jolla pätisi sekä $a = 0$ että $a + 1 = 0$. Näin aliavaruuden määritelmän ehto c) ei täyty. Siis $W$ ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

**Esimerkki 16.5.** Tutkitaan, onko joukko $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Oletetaan, että $A, B \in W$ ja ryhdytään tarkistamaan aliavaruuden ehtoja. Oletuksen nojalla $\det(A) = 0$ ja $\det(B) = 0$. Jotta $W$ olisi aliavaruus, pitäisi päteä $\det(A+B) = 0$. Determinantin laskusäännöt eivät kuitenkaan sano mitään matriisien summista. Alkaa vaikuttaa siltä, että kyseessä ei ole aliavaruus. Vaihdetaan siis strategiaa ja osoitetaan, että $W$ ei ole aliavaruus.

Valitaan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin $\det(A) = 0$ ja $\det(B) = 0$, joten $A, B \in W$. Kuitenkin

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ja siten $\det(A + B) = 2 \neq 0$. Näin ollen $A + B \notin W$, joten $W$ ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Huomaa, että alun pohdinnat voi jättää lopullisesta ratkaisusta pois.

**Esimerkki 16.6.** Esimerkin 15.5 mukaan kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukko $\mathcal{P}$ on vektoriavaruus. Tutkitaan erästä polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruutta. Sitä varten on määriteltävä polynomin aste. Olkoon $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ polynomi, jolle pätee $a_n \neq 0$. Lukua $n$ kutsutaan polynomin *asteeksi* ja merkitään $\deg(p)$. Esimerkiksi polynomin $p = 5x^6 - 2x + 4$ aste on 6, eli $\deg(p) = 6$. Huomaa, että nollapolynomille ei määritellä astetta.

Osoitetaan, että polynomiavaruudella $\mathcal{P}$ on aliavaruus

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}.$$

Joukko $\mathcal{P}_2$ koostuu siis nollapolynomista sekä polynomeista, joiden aste on korkeintaan kaksi.

Oletetaan, että $p, q \in \mathcal{P}_2$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ja $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$ joillakin $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$p + q = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0,$$

joten joko polynomin $p+q$ aste on korkeintaan kaksi tai $p+q$ on nollapolynomi. Siis $p+q \in \mathcal{P}_2$. Lisäksi

$$rp = (ra_2)x^2 + (ra_1)x + ra_0,$$

joten $rp \in \mathcal{P}_2$. Vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ nollavektori on nollapolynomi 0, joka kuuluu määritelmän mukaan joukkoon $\mathcal{P}_2$. Siten $\mathcal{P}_2$ on vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus.

Samalla tavoin voidaan osoittaa, että joukko

$$\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq n\}$$

on vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Seuraava lause osoittaa, että jokainen aliavaruus on itsekin pieni vektoriavaruus.

**Lause 16.7.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jolla on aliavaruus $W$. Tällöin myös aliavaruus $W$ on vektoriavaruus.*

*Todistus.* Vektoriavaruuden yhteenlaskua ja skalaarikertolaskua koskevat ehdot 1)–2) ja 5)–8) pysyvät voimassa, vaikka rajoitutaan tarkastelemaan alkuperäisen vektoriavaruuden $V$ osajoukkoa $W$.

Nollavektoria käsittelevä ehto 3) seuraa aliavaruuden määritelmästä, sillä nollavektori kuuluu aina aliavaruuteen. Vastavektoriin liittyvä ehto 4) puolestaan seuraa aliavaruuden määritelmän ehdosta b) sekä lauseen 15.10 kohdasta c). Jos nimittäin $\bar{v} \in W$, niin $-\bar{v} = (-1)\bar{v} \in W$. Siten jokaisella $W$:n vektorilla on vastavektori joukossa $W$.

Aliavaruuden määritelmän ehdot a) ja b) takaavat, että yhteenlasku ja skalaarikertolasku ovat joukon $W$ laskutoimituksia. □

## 16.1 Vektoreiden virittämä aliavaruus

**Määritelmä 16.8.** Olkoon $V$ jokin vektoriavaruus. *Vektoreiden* $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Sanotaan, että vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ virittävät vektoriavaruuden $V$, jos $V = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$.

**Esimerkki 16.9.** Esimerkissä 16.2 osoitettiin, että $W = \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Etsitään sille virittäjävektorit.

Havaitaan, että

$$W = \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\big((1, 0, 1), (0, 1, 0)\big).$$

Siis $W$ on vektoreiden $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, 0)$ virittämä vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

**Esimerkki 16.10.** Merkitään

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3b - c \\ 0 & 2a + 2c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osoitetaan, että $W$ on $2 \times 2$-matriisien muodostaman vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus. Tehdään tämä etsimällä $W$:lle virittäjävektorit.

Havaitaan, että

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 3b - c \\ 0 & 2a + 2c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Siis $W$ on vektoreiden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

virittämä vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Vektorien virittämä aliavaruus on aliavaruus myös määritelmän 16.1 mielessä. Tämä osoitetaan seuraavassa lauseessa.

**Lause 16.11.** *Jos* $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$*, niin* $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ *on vektoriavaruuden* $V$ *aliavaruus. Lisäksi* $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ *on pienin aliavaruus, joka sisältää vektorit* $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$*.*

*Todistus.* Sen todistaminen, että $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden $V$ aliavaruus, jätetään harjoitustehtäväksi. Todistus muistuttaa suuresti lauseen 7.9 todistusta.

Osoitetaan, että $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on *pienin* aliavaruus, joka sisältää vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$. Ensinnäkin vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ kuuluvat aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$, sillä

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= 1\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k, \\
\bar{v}_2 &= 0\bar{v}_1 + 1\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k, \\
&\vdots \\
\text{ja} \quad \bar{v}_k &= 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 1\bar{v}_k.
\end{aligned}
$$

Toiseksi on osoitettava, että mikä tahansa aliavaruus, johon vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ kuuluvat, sisältää aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Oletetaan, että $W$ on vektoriavaruuden $V$ jokin sellainen aliavaruus, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in W$. Koska $W$ on aliavaruus, se sisältää kaikkien vektoriensa summat ja skalaarimonikerrat. Siis $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \in W$ kaikilla $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) \subset W$. □

**Esimerkki 16.12.** Tutkitaan, onko $2 \times 2$-matriiseista muodostuva vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavien vektoreiden virittämä:

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Nyt

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
$$

joillakin $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. On selvitettävä, onko $A$ matriisien $B_1$, $B_2$, $B_3$ ja $B_4$ lineaarikombinaatio.

Ratkaistavaksi saadaan siis yhtälö $A = x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3 + x_4B_4$, missä $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Tämä yhtälö saadaan muotoon

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

ja edelleen muotoon

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_4 & x_1 + x_2 - x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 & -2x_1 - x_4 \end{bmatrix}.
$$

Ratkaistavaksi saadaan siis yhtälöryhmä

$$
\begin{cases}
x_1 - x_4 &= a_{11} \\
x_1 + x_2 - x_4 &= a_{12} \\
x_2 + x_3 - x_4 &= a_{21} \\
-2x_1 - x_4 &= a_{22}.
\end{cases}
$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaa porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & a_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_{11}+a_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_{11}-a_{12}+a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2a_{11}+a_{22} \end{array}\right].$$

Tässä porrasmatriisissa ei ole epätosia yhtälöitä. Siten yhtälöryhmällä on ratkaisuja olivat luvut $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ mitä tahansa. Tämä tarkoittaa, että $A$ on matriisien $B_1$, $B_2$, $B_3$ ja $B_4$ lineaarikombinaatio.

Näin ollen matriisit $B_1$, $B_2$, $B_3$ ja $B_4$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**Esimerkki 16.13.** Osoitetaan, että $2 \times 2$-matriiseista muodostuva vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ on seuraavien vektoreiden virittämä:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Nyt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

joillakin $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22},$$

joten $A$ on vektoreiden $E_{11}$, $E_{12}$, $E_{21}$ ja $E_{22}$ lineaarikombinaatio. Siten jokainen avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alkio voidaan kirjoittaa vektoreiden $E_{11}$, $E_{12}$, $E_{21}$ ja $E_{22}$ lineaarikombinaationa, eli $\mathbb{R}^{2\times 2} = \text{span}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

**Esimerkki 16.14.** Polynomit 1 ja $x$ virittävät polynomiavaruuden

$$\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 1\}.$$

Jos nimittäin $p \in \mathcal{P}_1$, niin $p = ax + b = ax + b \cdot 1$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$. Siten $p$ on polynomien $x$ ja 1 lineaarikombinaatio.

Samalla tavoin voidaan osoittaa, että $\mathcal{P}_n = \text{span}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

**Esimerkki 16.15.** Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritetään $\text{span}(A, B, I)$.

Jokainen vektoreiden (matriisien) $A$, $B$ ja $I$ lineaarikombinaatio on muotoa

$$xA + yB + zI = \begin{bmatrix} x+z & x+y \\ x+y & z \end{bmatrix},$$

missä $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että tällainen lineaarikombinaatio on symmetrinen matriisi. Siten $\operatorname{span}(A, B, I) \subset \{\, C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid C^\top = C \,\}$.

Osoitetaan sitten, että jokainen symmetrinen matriisi voidaan kirjoittaa vektoreiden $A$, $B$ ja $I$ lineaarikombinaationa. Oletetaan, että $C$ on symmetrinen matriisi. Tällöin

$$C = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix},$$

missä $d$, $e$, $f \in \mathbb{R}$. Kokeilemalla tai pohtimalla havaitaan, että

$$\begin{aligned} C = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix} &= (d-f)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (e-d+f)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (d-f)A + (e-d+f)B + fI. \end{aligned}$$

Siis jokainen symmetrinen matriisi on vektoreiden $A$, $B$ ja $I$ lineaarikombinaatio. Tämä tarkoittaa sitä, että $\{C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid C^\top = C\} \subset \operatorname{span}(A, B, I)$.

Näin ollen $\operatorname{span}(A, B, I) = \{C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid C^\top = C\}$.

Lauseessa 7.7 osoitettiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille, että jos jokin virittäjävektori on toisten virittäjävektoreiden lineaarikombinaatio, se voidaan jättää virittäjävektoreiden joukosta pois. Sama tulos pätee missä tahansa vektoriavaruudessa.

**Lause 16.16.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Oletetaan lisäksi, että $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatio. Tällöin*

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w}) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k).$$

*Todistus.* Todistus on samanlainen kuin lauseen 7.7 todistus. □

Laajennetaan lopuksi virittämisen määritelmää hieman. Määritelmässä 16.8 puhutaan yhden tai useamman vektorin virittämistä aliavaruuksista. Toisinaan halutaan ottaa huomioon myös tapaus, jossa virittäjävektoreita ei ole yhtään. Sovimme, että nollan vektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$.

Lisäksi virittämisen määritelmää voidaan laajentaa koskemaan myös äärettömiä vektorijoukkoja. Aliavaruus $\operatorname{span}(S)$, missä $S$ on äärettömän monen vektorin muodostama joukko, koostuu kaikista (äärellisistä) lineaarikombinaatioista, jotka voidaan muodostaa joukon $S$ vektoreista. Esimerkiksi kaikkien polynomien muodostama vektoriavaruus $\mathcal{P}$ on vektoreiden $1, x, x^2, \ldots$ virittämä.

# 17 Vapaus

Kurssin ensimmäisessä osassa käsiteltiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vapaita vektorijonoja. Tämä käsite voidaan yleistää mihin tahansa vektoriavaruuteen.

**Määritelmä 17.1.** Vektoriavaruuden $V$ vektoreista muodostuva jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos } c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \text{ joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}, \text{ niin } c_1 = 0, \ldots, c_k = 0.$$

Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*. Vapaata jonoa voidaan kutsua myös *lineaarisesti riippumattomaksi* ja sidottua *lineaarisesti riippuvaksi*.

*Tyhjä jono* on jono, jossa on ei ole yhtään vektoria. Sovimme, että tyhjä jono on vapaa.

**Esimerkki 17.2.** Merkitään

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tutkitaan, onko jono $(B_1, B_2, B_3, B_4)$ vapaa.

Oletetaan, että

$$c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 + c_4B_4 = O$$

joillakin $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. (Tässä tapauksessa nollavektori on nollamatriisi $O$.) Tästä seuraa, että

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja edelleen

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_4 & c_1 + c_2 - c_4 \\ c_2 + c_3 - c_4 & -2c_1 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistavaksi saadaan siis yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c_1 - c_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 - c_4 &= 0 \\ c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ -2c_1 - c_4 &= 0. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ja $c_4 = 0$. Siis jono $(B_1, B_2, B_3, B_4)$ vapaa.

**Esimerkki 17.3.** Esimerkissä 16.13 määriteltiin avaruuden $\mathbb{R}^2$ matriisit $E_{11}$, $E_{12}$, $E_{21}$ ja $E_{22}$. Osoitetaan, että jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on vapaa. Oletetaan, että luvut $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_1E_{11} + c_2E_{12} + c_3E_{21} + c_4E_{22} = O.$$

Yhtälön vasen puoli saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Nyt siis

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mistä seuraa, että $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ja $c_4 = 0$. Siten jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on vapaa.

**Esimerkki 17.4.** Osoitetaan, että polynomiavaruuden $\mathcal{P}_n$ jono $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ on vapaa. Oletetaan, että $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_0 1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = 0.$$

(Yhtälön oikealla puolella on avaruuden $\mathcal{P}_n$ nollavektori eli nollapolynomi.) Kaksi polynomia ovat samat, jos ja vain jos niiden kertoimet ovat samat. Täytyy siis päteä $c_0 = 0, c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$. Siten jono $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ on vapaa.

Vapauden määritelmän mukaan jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos on olemassa sellaiset kertoimet $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ ja jokin kertoimista $c_1, \ldots, c_k$ ei ole nolla.

**Esimerkki 17.5.** Toisinaan jono on helppo osoittaa sidotuksi keksimällä sopivat kertoimet. Tutkitaan vaikkapa vektoriavaruuden $V$ vektoreista muodostettua jonoa $(\bar{v}_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Huomataan, että

$$1\bar{v}_1 + (-1)\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 = \bar{0}.$$

Siten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on sidottu.

Seuraavaksi osoitamme vapauteen liittyviä lauseita. Monet tuloksista olivat esillä jo luvussa 5 avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille. Yleisessä tapauksessa todistukset ovat hyvin samanlaisia, joten niitä ei esitetä tässä.

Seuraava lause osoittaa, että vektorien vapaus takaa yksikäsitteisen esityksen.

**Lause 17.6.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden* $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ *alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

*Todistus.* Todistus on käytännössä tehty osana 6.3 todistusta. □

Vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

**Lause 17.7.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos*

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

*jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

*Todistus.* Todistus on samanlainen kuin lauseen 5.7 todistus. □

Vapaasta jonosta voidaan tietyin ehdoin muodostaa vielä pidempi vapaa jono.

**Lause 17.8.** *Oletetaan, että vektoriavaruuden $V$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Oletetaan lisäksi, että $\bar{w} \in V$. Tällöin jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa, jos ja vain jos*

$$\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k).$$

*Todistus.* "$\Rightarrow$" Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa. Tavoitteena on näyttää, että $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Oletetaan vastoin väitettä, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + (-1)\bar{w} = \bar{0}$, joten jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ ei ole vapaa. Tämä on ristiriita. Siten $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$, ja osoitetaan, että jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa. Oletetaan, että

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k + c_{k+1}\bar{w} = \bar{0}$$

joillakin $c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{R}$. Jos $c_{k+1} \neq 0$, niin

$$\bar{w} = \frac{-c_1}{c_{k+1}}\bar{v}_1 + \cdots + \frac{-c_k}{c_{k+1}}\bar{v}_k.$$

Nyt siis $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tämä on kuitenkin vastoin oletusta, joten täytyy päteä $c_{k+1} = 0$. Tällöin

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, tiedetään, että $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Koska myös kerroin $c_{k+1}$ on nolla, on jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ vapaa. □

Vapaan jonon jokainen osajono on vapaa.

**Lause 17.9.** *Oletetaan, että vektoriavaruuden $V$ jono $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Tällöin jokainen jonon $\mathcal{S}$ osajono on myöskin vapaa.*

*Todistus.* Osajono tarkoittaa jonoa, joka saadaan poistamalla alkuperäisestä jonosta vektoreita. Myös jono itse on yksi osajonoista.

Oletetaan, että vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että mikä tahansa sen osajono on vapaa. Jos osajono on tyhjä jono, se on sopimuksemme mukaan vapaa. Tutkitaan sitten epätyhjiä jonoja. Koska vapautta tutkittaessa vektoreiden järjestyksellä ei ole väliä, riittää osoittaa, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ on vapaa kaikilla $m \in \{1, \dots, k\}$.

Oletetaan siis, että $m \in \{1, \dots, k\}$. Olkoot luvut $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_m\bar{v}_m = \bar{0}.$$

Tästä seuraa, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_m\bar{v}_m + 0\bar{v}_{m+1} + \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa, täytyy yllä olevassa lineaarikombinaatiossa kaikkien kertoimien olla nollia. Siis $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$. Siten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ on vapaa. $\square$

Vapauden määritelmässä käsitellään vain äärellisiä vektorijonoja. Määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa koskemaan myös äärettömän monen vektorin muodostamia jonoja samalla tavalla kuin virittämisen tapauksessa. Vektoriavaruuden $V$ jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots)$ on vapaa, jos sen kaikki äärelliset osajonot ovat vapaita. Esimerkiksi polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ jono $(1, x, x^2, \dots)$ on vapaa.

Lisäksi sovimme, että jono, jossa ei ole yhtään vektoria, on vapaa.

# 18 Kanta

**Määritelmä 18.1.** Oletetaan, että $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k \in V$. Jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vektoriavaruuden $V$ *kanta*, jos

a) $V = \text{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$

b) $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

**Esimerkki 18.2.** Esimerkeissä 16.13 ja 17.3 osoitettiin, että matriisiavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ virittää avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ja on lisäksi vapaa. Siten jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.

Esimerkeissä 16.12 ja 17.2 puolestaan osoitettiin, että matriisit

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

virittävät avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ja ovat lineaarisesti riippumattomia. Siten myös jono

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.

**Esimerkki 18.3.** Polynomiavaruuden $\mathcal{P}_n$ jono $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ virittää avaruuden $\mathcal{P}_n$ ja on vapaa esimerkkien 16.14 ja 17.4 perusteella. Jono $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ on siis avaruuden $\mathcal{P}_n$ kanta.

Vektoriavaruuden vektorit voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla kannan vektoreiden lineaarikombinaatioina.

**Lause 18.4.** *Olkoon $V$ vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden $V$ kanta, jos ja vain jos jokainen vektorivaruuden $V$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

*Todistus.* Väite seuraa lähes suoraan lauseesta 17.6 samalla tavalla kuin vastaava avaruutta $\mathbb{R}^n$ koskeva lause 6.3. □

**Esimerkki 18.5.** Osoitetaan, että $\mathcal{T} = (1 + x,\ x - x^2,\ 2 + x^3,\ 5x)$ on polynomiavaruuden $\mathcal{P}_3$ kanta. Tehdään se näyttämällä, että jokainen avaruuden $\mathcal{P}_3$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla jonon $\mathcal{T}$ alkioiden lineaarikombinaationa.

Oletetaan, että $p \in \mathcal{P}_3$. Nyt $p = a + bx + cx^2 + dx^3$ joillakin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On ratkaistava yhtälö

$$b_1(1 + x) + b_2(x - x^2) + b_3(2 + x^3) + b_4(5x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

missä tuntemattomia ovat $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. Käytetään yhtälön vasempaan puoleen osittelulakia:

$$b_1 + b_1x + b_2x - b_2x^2 + 2b_3 + b_3x^3 + 5b_4x = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Järjestetään sitten vasemman puolen termit uudelleen ja käytetään osittelulakia toiseen suuntaan:

$$(b_1 + 2b_3) + (b_1 + b_2 + 5b_4)x - b_2x^2 + b_3x^3 = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Kaksi polynomia ovat samat, jos ja vain jos niiden kaikki kertoimet ovat samoja. Siksi yhtälö vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} b_1 + 2b_3 &= a \\ b_1 + b_2 + 5b_4 &= b \\ -b_2 &= c \\ b_3 &= d. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 5 & b \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \end{array}\right].$$

Kun sitä muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -a+b+c+2d \end{array}\right].$$

Porrasmatriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu. (Epätosia rivejä ei ole, joten ratkaisuja on olemassa. Vapaita muuttujia ei ole, joten ratkaisuja on vain yksi.) Vaihtoehtoisesti ratkaisujen lukumäärän voi määrittää tutkimalla, onko yhtälöryhmän kerroinmatriisi kääntyvä (ks. lause 10.7). Tämä käy helposti determinantin avulla.

Nyt tiedetään, että yhtälöllä

$$b_1(1 + x) + b_2(x - x^2) + b_3(2 + x^3) + b_4(5x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

on täsmälleen yksi ratkaisu olivat $a, b, c, d$ mitä reaalilukuja tahansa. Siten jokainen avaruuden $\mathcal{P}_3$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla jonon $\mathcal{T}$ alkioiden lineaarikombinaationa. Näin ollen $\mathcal{T}$ on avaruuden $\mathcal{P}_3$ kanta.

**Lause 18.6.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Jos vektoriavaruuden $V$ vektorijonon pituus on suurempi kuin $n$, kyseinen jono ei voi olla vapaa.*

Tässä jonon pituudella tarkoitetaan jonossa olevien vektorien lukumäärää.

*Todistus.* Väite on aikaisemmin todistettu avaruudelle $\mathbb{R}^n$. (Ks. korollaari 5.11.) Yleisessä tapauksessa todistus on samanlainen. □

Aiemmin mainittiin, että voidaan puhua myös äärettömän monen vektorin virittämistä aliavaruuksista sekä äärettömän monen vektorin muodostamista vapaista jonoista. Siksi myös kannan määritelmä voidaan yleistää koskemaan äärettömiä jonoja. Esimerkiksi jono $(1, x, x^2, \ldots)$ on polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ kanta.

## 18.1 Dimensio

Vektoriavaruuden dimensio määritetään samaan tapaan kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio: se on kantavektoreiden lukumäärä. Tällöin esimerkiksi suoran dimensioksi tulee yksi ja tason dimensioksi kaksi. Ennen dimension määrittelemistä täytyy kuitenkin varmistua siitä, että vaikka avaruudella voi olla useita eri kantoja, niissä on kuitenkin aina yhtä monta vektoria. Tässä rajoitutaan vain äärellisiin kantoihin, vaikka vastaava tulos voitaisiin osoittaa myös siinä tapauksessa, että kantavektoreita on äärettömän monta.

**Lause 18.7.** *Oletetaan, että vektoriavaruudella $V$ on äärellisen monesta vektorista koostuva kanta. Tällöin avaruuden $V$ jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

*Todistus.* Tämän lauseen voisi todistaa samalla tavalla kuin vastaavan avaruuden $\mathbb{R}^n$ kantoja koskevan lauseen 7.13. Nyt voidaan kuitenkin päästä hieman helpommalla, kun käytetään edellisessä alaluvussa osoitettuja tuloksia.

Oletetaan vastoin väitettä, että vektoriavaruudella $V$ on kaksi eripituista kantaa $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ja $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m)$, missä $k > m$. Koska jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on kanta, se on vapaa. Nyt päädytään ristiriitaan, sillä lauseen 18.6 nojalla vektoriavaruudessa ei voi olla vapaata jonoa, joka on pitempi kuin jokin vektoriavaruuden kanta. Siten väite on todistettu. $\square$

Edellisen lauseen perusteella voidaan määritellä vektoriavaruuden dimensio.

**Määritelmä 18.8.** Vektoriavaruus $V$ on *äärellisulotteinen*, jos sillä on äärellisen monesta vektorista koostuva kanta. Tällöin avaruuden *dimensio* $\dim(V)$ on kannan vektoreiden lukumäärä. Jos vektoriavaruudella ei ole äärellistä kantaa, avaruus on *ääretönulotteinen* ja sen dimensio on ääretön.

Jos vektoriavaruuden dimensio on $n$, on tapana sanoa, että vektoriavaruus on *$n$-ulotteinen*.

**Esimerkki 18.9.** Matriisiavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio on neljä, sillä esimerkin 18.2 perusteella tiedetään, että avaruudella on kanta $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Polynomiavaruuden $\mathcal{P}_n$ dimensio on $n+1$, sillä avaruudella on kanta $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

**Esimerkki 18.10.** Vektoriavaruuden $\{\bar{0}\}$ dimensio on nolla, sillä sen kanta on tyhjä jono, jossa on nolla kappaletta vektoreita. Olemme nimittäin sopineet, että tyhjän jonon virittämä avaruus on $\{\bar{0}\}$ ja että tyhjä jono on vapaa.

Vapaa jono voidaan jatkaa vektoriavaruuden kannaksi.

**Lause 18.11.** *Oletetaan, että $V$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\mathcal{S} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on avaruuden $V$ vapaa jono. Tällöin jonoon $\mathcal{S}$ voidaan lisätä vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden $V$ kanta.*

*Todistus.* Tarkastellaan sellaisia avaruuden $V$ vektoreista muodostuvia jonoja $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$, joilla jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$ on vapaa. Valitaan näistä jonoista jokin sellainen, jonka pituus on mahdollisimman suuri. (Tällainen on olemassa, sillä lauseen 18.6 nojalla minkään vapaan jonon pituus ei voi olla suurempi kuin avaruuden $V$ ulottuvuus.) Olkoon tuo mahdollisimman pitkä jono $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r)$.

Osoitetaan, että jono $\mathcal{B}$ on avaruuden $V$ kanta. Koska $\mathcal{B}$ on vapaa, riittää osoittaa, että $\mathcal{B}$ virittää avaruuden $V$. Oletetaan sitä varten, että $\bar{v} \in V$. Jos $\bar{v} \notin \operatorname{span}(\mathcal{B})$, niin lauseen 17.8 nojalla jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r, \bar{v})$ on vapaa. Tämä on ristiriita, sillä näin saatu jono on pidempi kuin $\mathcal{B}$, jonka pituus oli suurin mahdollinen. Siten $\bar{v} \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, mistä seuraa, että $V = \operatorname{span}(\mathcal{B})$. Näin on osoitettu, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r)$ on avaruuden $V$ kanta. □

Virittäjäjono voidaan lyhentää vektoriavaruuden kannaksi.

**Lause 18.12.** *Oletetaan, että jono $\mathcal{S} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ virittää avaruuden $V$. Tällöin jonosta $\mathcal{S}$ voidaan poistaa vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden $V$ kanta.*

*Todistus.* Todistus on hyvin samankaltainen kuin edellisen lauseen todistus. Tarkastellaan kaikkia sellaisia jonon $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ osajonoja, jotka ovat vapaita. (Tällaisia jonoja on olemassa, sillä esimerkiksi tyhjä jono on vapaa.) Valitaan näistä jonoista jokin sellainen, jonka pituus on mahdollisimman suuri. Olkoon tuo mahdollisimman pitkä vapaa osajono $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r)$.

Osoitetaan, että $\mathcal{B}$ on avaruuden $V$ kanta. Koska $\mathcal{B}$ on vapaa, riittää osoittaa, että $\mathcal{B}$ virittää avaruuden $V$. Tämä puolestaan on todistettu, jos voidaan osoittaa, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$ kaikilla $\bar{w} \in \mathcal{S}$. Oletetaan vastoin väitettä, että $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\mathcal{B})$ jollakin $\bar{w} \in \mathcal{S}$. Nyt lauseen 17.8 nojalla jono $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r, \bar{w})$ on vapaa. Tämä on ristiriita, sillä näin saatu osajono on pidempi kuin $\mathcal{B}$, jonka pituus oli suurin mahdollinen. Siten $\bar{w} \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, mistä seuraa, että $V = \operatorname{span}(\mathcal{B})$. Näin on osoitettu, että $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r)$ on avaruuden $V$ kanta. □

**Lause 18.13.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jonka dimensio on $n$.*

*a) Jokainen vektoriavaruuden $V$ vapaa jono, jonka pituus on $n$, on avaruuden $V$ kanta.*

*b) Jokainen vektoriavaruuden $V$ virittäjäjono, jonka pituus on $n$, on avaruuden $V$ kanta.*

*Todistus.* a) Oletetaan, että avaruuden $V$ jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on vapaa. Nyt lauseen 18.11 nojalla jonoon voidaan lisätä vektoreita niin, että saadaan aikaan kanta. Kuitenkin vektoriavaruuden $V$ dimensio on $n$, joten kannassa on oltava $n$ vektoria. Jonon $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ täytyy siis jo olla kanta.

b) Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ virittää avaruuden $V$. Nyt lauseen 18.12 nojalla jonosta voidaan ottaa pois vektoreita niin, että saadaan aikaan kanta. Kuitenkin vektoriavaruuden kannassa on oltava $n$ vektoria. Jonon $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ täytyy siis jo olla kanta. □

Edellä osoitetuista lauseista on hyötyä, kun tutkitaan, onko annettu jono vektoriavaruuden kanta. Kootaan vielä kaikki tiedot yhteen. Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jonka dimensio on $n$.

- Jos vektoriavaruuden $V$ vektorijonon pituus on suurempi kuin $n$, kyseinen jono ei voi olla vapaa.
- Jos vektoriavaruuden $V$ vektorijonon pituus on pienempi kuin $n$, kyseinen jono ei voi virittää avaruutta $V$.

- Jos vektoriavaruuden $V$ vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on $n$, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden $V$ vektorijono on vapaa ja sen pituus on $n$, kyseinen jono on kanta.

**Esimerkki 18.14.** Avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $((1,2),(-13,4))$ on vapaa, sillä vektorit $(1,2)$ ja $(-13,4)$ eivät ole yhdensuuntaisia. Koska jonossa on kaksi vektoria ja se on vapaa, jonon tiedetään olevan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Aliavaruuden dimensio ei voi olla suurempi kuin itse vektoriavaruuden dimensio.

**Lause 18.15.** *Oletetaan, että $V$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus, jolla on aliavaruus $W$. Tällöin myös $W$ on äärellisulotteinen ja* $\dim(W) \leq \dim(V)$*. Lisäksi* $\dim(W) = \dim(V)$*, jos ja vain jos $W = V$.*

*Todistus.* Osoitetaan ensin, että aliavaruudella $W$ on kanta. Tarkastellaan kaikkia aliavaruuden $W$ vapaita jonoja. Koska ne ovat myös vektoriavaruuden $V$ vapaita jonoja, niiden pituus on lauseen 18.6 nojalla pienempi tai yhtä suuri kuin $\dim(V)$. Valitaan jono, jonka pituus on suurin mahdollinen. Samaan tapaan kuin lauseen 18.11 todistuksessa voidaan osoittaa, että näin valittu jono on aliavaruuden $W$ kanta. Kanta on siis olemassa. Tästä nähdään myös, että aliavaruudella $W$ on äärellinen kanta ja tuon kannan pituus on väistämättä pienempi tai yhtä suuri kuin $\dim(V)$. Siten $W$ on äärellisulotteinen, ja $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Osoitetaan vielä väitteen toinen osa. Jos $V = W$, niin $\dim(W) = \dim(V)$. Oletetaan sitten, että $\dim(W) = \dim(V)$, ja osoitetaan, että $W = V$. Olkoon $\mathcal{B}$ aliavaruuden $W$ kanta. Nyt $\mathcal{B}$ on avaruuden $V$ vapaa jono, jonka pituus on sama kuin avaruuden $V$ dimensio. Lauseen 18.13 perusteella $\mathcal{B}$ on avaruuden $V$ kanta. Tästä seuraa, että $V = \operatorname{span}(\mathcal{B}) = W$. □

## 18.2 Koordinaatit

**Määritelmä 18.16.** Olkoon $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ vektoriavaruuden $V$ kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in V$. Vektorin *$\bar{u}$ koordinaateiksi kannan $\mathcal{B}$ suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \dots, a_n$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n.$$

**Esimerkki 18.17.** Usein koordinaattien määrittäminen vaatii yhtälöryhmän ratkaisemista, mutta toisinaan ne voi nähdä lähes suoraan.

Määritetään avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

koordinaatit kannan $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ suhteen. (Nämä matriisit esiteltiin esimerkissä 16.13.) Kirjoitetaan matriisi kantavektorien lineaarikombinaationa:

$$A = 1E_{11} + 2E_{12} + (-1)E_{21} + 0E_{22}.$$

Tästä nähdään, että koordinaatit ovat 1, 2, $-1$ ja 0.

Kaikki tieto vektorista sisältyy sen koordinaatteihin, ja ne määräävät vektorin täysin. Koordinaateista voidaan muodostaa niin kutsuttu koordinaattivektori.

**Määritelmä 18.18.** Jos vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $a_1, \ldots, a_n$, vektorin $\bar{u}$ *koordinaattivektori* kannan $\mathcal{B}$ suhteen on

$$[\bar{u}]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n).$$

**Esimerkki 18.19.** Polynomiavaruuden $\mathcal{P}_3$ polynomin $p = x^3 - 4x + 2$ koordinaatit kannan $\mathcal{S} = (1, x, x^2, x^3)$ suhteen ovat 2, $-4$, 0 ja 1. Siten $p$:n koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $[p]_{\mathcal{S}} = (2, -4, 0, 1)$.

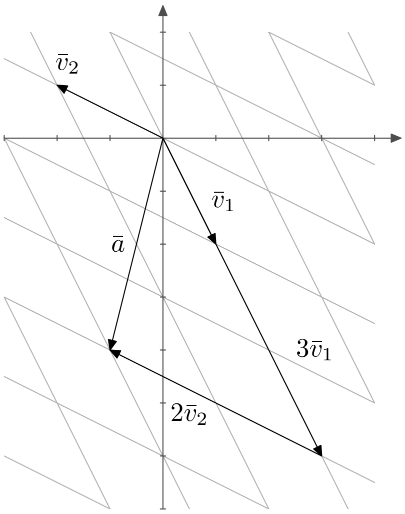
Jos käytetäänkin avaruuden $\mathcal{P}_3$ kantaa $\mathcal{T} = (1 + x,\ x - x^2,\ 2 + x^3,\ 5x)$, saadaan $p$:lle erilainen koordinaattivektori. Huomataan, että

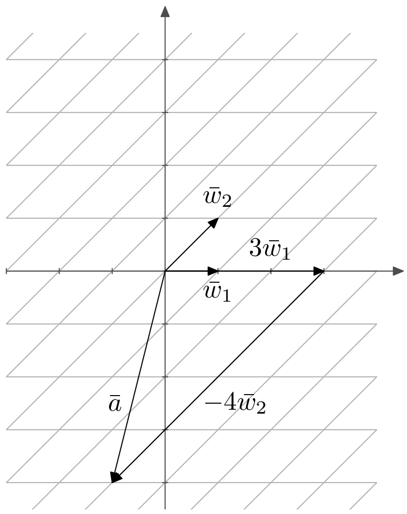
$$p = 0(1 + x) + 0(x - x^2) + 1(2 + x^3) + (-4/5)(5x).$$

Siten $[p]_{\mathcal{T}} = (0, 0, 1, -4/5)$.

**Esimerkki 18.20.** Tutkitaan kahta avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantaa ja erään vektorin koordinaatteja noiden kantojen suhteen. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 1)$ sekä $\bar{w}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{w}_2 = (1, 1)$. Nyt $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja. Tutkitaan vektorin $\bar{a} = (-1, -4)$ koordinaatteja näiden kantojen suhteen.

Koska $\bar{a} = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$, on vektorin $\bar{a}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen $[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = (3, 2)$. Koska $\bar{a} = 3\bar{w}_1 - 4\bar{w}_2$, koordinaattivektori kannan $\mathcal{T}$ suhteen on $[\bar{a}]_{\mathcal{T}} = (3, -4)$.

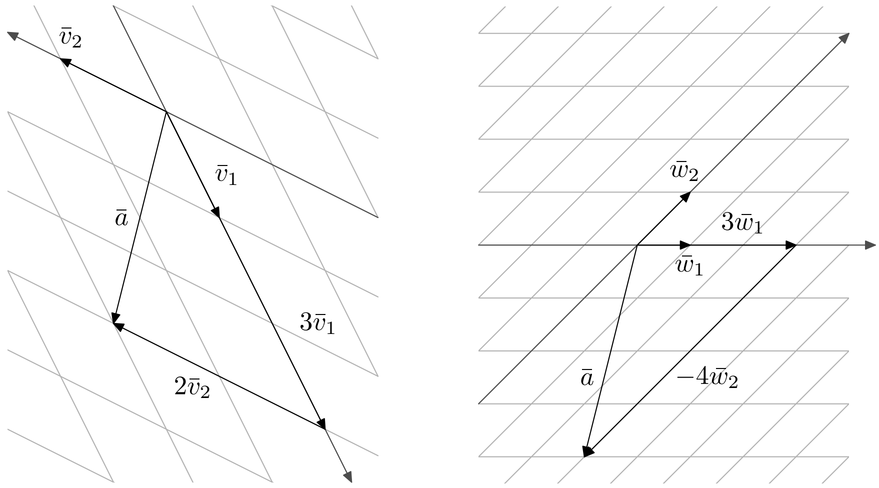



Kuva 18.49: Vektorin $\bar{a} = (-1, -4)$ koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen ovat 3 ja 2 ja kannan $\mathcal{T}$ suhteen puolestaan 3 ja $-4$.

Koordinaatteja on havainnollistettu kuvassa 18.49. Kun käytetään kantaa $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, on mentävä 3 ruutua vektorin $\bar{v}_1$ suuntaan ja 2 ruutua vektorin $\bar{v}_2$ suuntaan, jotta päästään pisteeseen $(-1,-4)$. Tämä johtuu siitä, että vektorin $\bar{a} = (-1,-4)$ koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen ovat 3 ja 2. Jos taas käytetään kantaa $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, on mentävä 3 ruutua vektorin $\bar{w}_1$ suuntaan ja 4 ruutua vektorin $\bar{w}_2$ suuntaa vastaan, jotta päästään pisteeseen $(-1,-4)$. Tämä johtuu siitä, että vektorin $\bar{a} = (-1,-4)$ koordinaatit kannan $\mathcal{T}$ suhteen ovat 3 ja $-4$.

Kun käytetään jotakin muuta kuin luonnollista kantaa, vääntyy koordinaatisto ikään kuin vinoon. Kuvassa 18.50 luonnollisen kannan koordinaattiakselit on häivytetty pois ja niiden sijasta näkyvissä ovat kantavektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ sekä kantavektoreiden $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ muodostamat koordinaattiakselit.




Kuva 18.50: Kun käytetään jotakin muuta kuin luonnollista kantaa, vääntyy koordinaatisto vinoon.

**Esimerkki 18.21.** Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ luonnollisen kannan suhteen kirjoitetut koordinaattivektorit näyttävät täsmälleen samoilta kuin vektorit itse. Määritetään vaikkapa avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorin $\bar{b} = (-1,2,-4)$ koordinaattivektori luonnollisen kannan $E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ suhteen. Koska

$$\bar{b} = (-1,2,-4) = -1\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3,$$

ovat koordinaatit $-1$, 2 ja $-4$. Siten $[\bar{b}]_E = (-1,2,-4)$.

Seuraava lause osoittaa, että kahden vektorin summan koordinaattivektori saadaan laskemalla kyseisten vektoreiden koordinaattivektorit yhteen. Vastaavasti skalaarimonikerran koordinaattivektori saadaan kertomalla alkuperäisen vektorin koordinaattivektoria skalaarilla.

**Lause 18.22.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathcal{B}$ avaruuden $V$ kanta. Tällöin*

*a)* $[\bar{x} + \bar{y}]_{\mathcal{B}} = [\bar{x}]_{\mathcal{B}} + [\bar{y}]_{\mathcal{B}}$ *ja*

*b)* $[c\bar{x}]_{\mathcal{B}} = c[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$.

*Todistus.* a) Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Olkoot $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n, \\ \bar{y} &= b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_n\bar{v}_n. \end{aligned}$$

Nyt $[\bar{x}]_\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $[\bar{y}]_\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Toisaalta

$$\bar{x} + \bar{y} = (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_n + b_n)\bar{v}_n,$$

joten $[\bar{x} + \bar{y}]_\mathcal{B} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$. Tästä seuraa, että

$$[\bar{x} + \bar{y}]_\mathcal{B} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = [\bar{x}]_\mathcal{B} + [\bar{y}]_\mathcal{B}.$$

b) Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Koordinaattivektori ei kerro yhtään mitään, ellei tiedetä, minkä kannan suhteen se on kirjoitettu. Ilmiötä voi verrata eri kiellillä kirjoitettuihin sanoihin. Jos kirjoitetaan "helmet", on sanalla eri merkitys sen mukaan, oletetaanko kielen olevan suomi vai englanti. Samalla tavalla koordinaattivektori $(1, 2, 3)$ voi tarkoittaa esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria

$$1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1) = (1, 2, 3)$$

tai vektoria

$$1 \cdot (1, -1, 0) + 2 \cdot (0, 1, -1) + 3 \cdot (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

riipuen siitä, onko käytössä luonnollinnen kanta vai kanta $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$. Jos taas ajatellaan polynomiavaruutta $\mathcal{P}_2$ ja sen kantaa $(1, x, x^2)$, vastaa koordinaattivektoria $(1, 2, 3)$ vektori $1 + 2x + 3x^2$.

Lineaarialgebran käännöskoneina toimivat niin kutsutut kannanvaihtomatriisit. Jos kielten välillä toimiva käännöskone muuttaa vaikkapa sanan "kukka" sanaksi "flower", muuttaa kannanvaihtomatriisi yhden kannan suhteen kirjoitetun koordinaattivektorin toisen kannan suhteen kirjoitetuksi koordinaattivektoriksi.

Olkoot $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ avaruuden $V$ kantoja. Tulemme osoittamaan, että tällöin on olemassa kääntyvä matriisi $P$, jolle pätee $P[v]_\mathcal{S} = [v]_\mathcal{T}$ kaikilla $v \in V$. Matriisia $P$ kutsutaan kannanvaihtomatriisiksi.

**Määritelmä 18.23.** Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jolla on kannat $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$. *Kannanvaihtomatriisi* kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $T$ on matriisi

$$P_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}} = [[\bar{v}_1]_\mathcal{T}, \ldots, [\bar{v}_n]_\mathcal{T}].$$

Kannanvaihtomatriisin sarakkeina ovat siis kannan $\mathcal{S}$ vektorien koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitettuina.

**Esimerkki 18.24.** Palataan vielä esimerkkiin 18.20, jossa tarkasteltiin avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, missä $\bar{v}_1 = (1, -2)$, $\bar{v}_2 = (-2, 1)$ ja $\bar{w}_1 = (1, 0)$, $\bar{w}_2 = (1, 1)$.

Määritetään kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$. Tätä varten on kirjoitettava kannan $\mathcal{S}$ vektorit kannan $\mathcal{T}$ vektoreiden lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= (1,-2) = 3(1,0) - 2(1,1) = 3\bar{w}_1 - 2\bar{w}_2,\\ \bar{v}_2 &= (-2,1) = -3(1,0) + (1,1) = -3\bar{w}_1 + \bar{w}_2.\end{aligned}$$

Nyt $[\bar{v}_1]_{\mathcal{T}} = (3,-2)$ ja $[\bar{v}_2]_{\mathcal{T}} = (-3,1)$, joten

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tarkistetaan vielä, että matriisi toimii niin kuin pitääkin. Esimerkissä 18.20 laskimme, että vektorin $\bar{a} = (-1,-4)$ koordinaattivektorit kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen ovat $[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = (3,2)$ ja $[\bar{a}]_{\mathcal{T}} = (3,-4)$. Nähdään, että

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}.$$

aivan kuten pitääkin.

Seuraava lause varmistaa edellisen esimerkin havainnon: kannanvaihtomatriisi muuttaa yhden kannan suhteen kirjoitetun koordinaattivektorin toisen kannan suhteen kirjoitetuksi koordinaattivektoriksi.

**Lause 18.25.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jolla on kannat $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tällöin*

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}$$

*kaikilla $\bar{a} \in V$.*

*Kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$ on ainoa matriisi $P$, jolle pätee $P[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}$ kaikilla $\bar{a} \in V$.*

*Todistus.* Merkitään $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$. Oletetaan, että $\bar{a} \in V$. Olkoon vektorin $\bar{a}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen

$$[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = (c_1, \ldots, c_n).$$

Toisin sanoen $\bar{a} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_n\bar{v}_n$. Nyt lausetta 18.22 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [[\bar{v}_1]_{\mathcal{T}}, \ldots, [\bar{v}_n]_{\mathcal{T}}]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} &= c_1[\bar{v}_1]_{\mathcal{T}} + \cdots + c_n[\bar{v}_n]_{\mathcal{T}} \\ &= [c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_n\bar{v}_n]_{\mathcal{T}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten väitteen toinen osa. Oletetaan, että $P$ on $n\times n$-matriisi, jolle pätee $P[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}$ kaikilla $\bar{a} \in V$. Tämä pätee erityisesti kaikilla kannan $S$ vektoreilla. Jos $\bar{v}_i$ on kannan $\mathcal{S}$ vektori, sen koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, missä luku 1 on kohdassa $i$. Toisin sanoen $[\bar{v}_i]_{\mathcal{S}} = \bar{e}_i$.

Oletuksen nojalla $P\bar{e}_i = P[\bar{v}_i]_{\mathcal{S}} = [\bar{v}_i]_{\mathcal{T}}$. Toisaalta tiedetään, että $P\bar{e}_i$ on $i$:s sarake matriisissa $P$. Näin ollen matriisin $P$ sarakkeet ovat kannan $\mathcal{S}$ vektorien koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitettuina. Kannanvaihtomatriisin määritelmän mukaan $P = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$. □

**Esimerkki 18.26.** Polynomiavaruudella $\mathcal{P}_2$ on esimerkin 18.3 mukaan kanta $\mathcal{S} = (1, x, x^2)$. Voidaan osoittaa, että sillä on myös kanta $\mathcal{T} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$. Muodostetaan kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$.

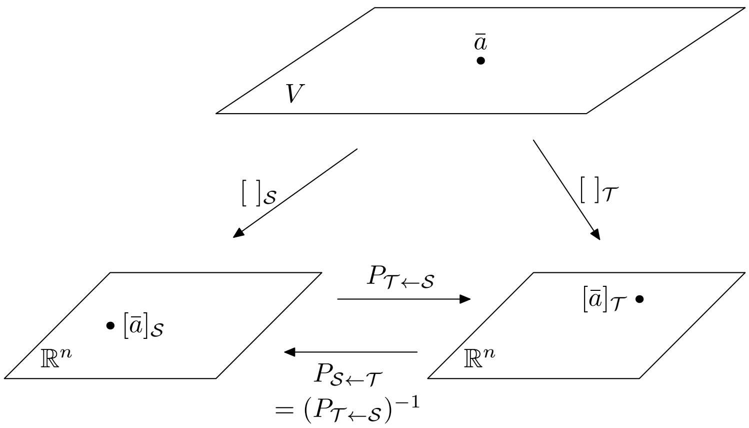
Kannan $\mathcal{S} = (1, x, x^2)$ vektoreiden koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ suhteen ovat $[1]_{\mathcal{T}} = (1, 0, 0)$, $[x]_{\mathcal{T}} = (-1, 1, 0)$ ja $[x^2]_{\mathcal{T}} = (0, -1, 1)$. Kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$ saadaan laittamalla ne matriisin sarakkeiksi:

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polynomin $p = 4 - 3x + 7x^2$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $[p]_{\mathcal{S}} = (4, -3, 7)$. Se saadaan muutettua koordinaattivektoriksi kannan $\mathcal{T}$ suhteen kertomalla kannanvaihtomatriisilla $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$:

$$[p]_{\mathcal{T}} = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}[p]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Kannanvaihtoa vektoriavaruuden $V$ kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ välillä on havainnollistettu alla kuvassa 18.51. Vektorin $\bar{a} \in V$ koordinaattivektorit kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita. Kannanvaihtomatriisi muuttaa yhden kannan suhteen kirjoitetun koordinaattivektorin toisen kannan suhteen kirjoitetuksi koordinaattivektoriksi.




Kuva 18.51: Havainnekuva kannanvaihdosta kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ välillä.

Kannanvaihtomatriisin käänteismatriisi toimii kannanvaihtomatriisina toiseen suuntaan.

**Lause 18.27.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jolla on kannat $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Matriisin $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$ käänteismatriisi on kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{T}$ kantaan $\mathcal{S}$. Toisin sanoen*

$$(P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}.$$

*Todistus.* Merkitään $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$.

Aloitetaan osoittamalla, että matriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = [[\bar{v}_1]_{\mathcal{T}}, \dots, [\bar{v}_n]_{\mathcal{T}}]$ on kääntyvä. Lauseen 10.7 nojalla riitää osoittaa, että matriisin sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia.

Oletetaan siis, että $c_1[\bar{v}_1]_{\mathcal{T}} + \dots + c_n[\bar{v}_n]_{\mathcal{T}} = \bar{0}$ joillakin $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa, että $[c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n]_{\mathcal{T}} = \bar{0}$. Nyt vektorin $c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n$ kaikki koordinaatit kannan $\mathcal{T}$ suhteen ovat nollia eli

$$c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n = 0\bar{w}_1 + \dots + 0\bar{w}_n = \bar{0}_V.$$

On siis osoitettu, että $c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n = \bar{0}_V$. Koska jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on kanta, se on vapaa. Näin ollen $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$, ja siten jono $([\bar{v}_1]_{\mathcal{T}}, \dots, [\bar{v}_n]_{\mathcal{T}})$ on vapaa.

Nyt siis tiedetään, että käänteismatriisi $(P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1}$ on olemassa. Osoitetaan vielä, että se on kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{T}$ kantaan $\mathcal{S}$. Oletetaan, että $\bar{a} \in V$. Tiedetään, että $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}$. Kun tämän yhtälön molemmat puolet kerrotaan käänteismatriisilla $(P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1}$, saadaan $[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1}[\bar{a}]_{\mathcal{T}}$.

Matriisi $(P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1}$ siis muuttaa kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitetut koordinaattivektorit kannan $\mathcal{S}$ suhteen kirjoitetuiksi koordinaattivektoreiksi. Koska kannanvaihtomatriisi on lauseen 18.25 nojalla yksikäsitteinen, pätee $(P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$. □

Kannanvaihdon kahden kannan välillä voi tehdä jonkin kolmannen kannan kautta.

**Lause 18.28.** *Oletetaan, että $V$ on vektoriavaruus, jolla on kannat $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tällöin*

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}} = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}.$$

*Todistus.* Osoitetaan, että tulo $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}$ vaihtaa kannan $\mathcal{R}$ suhteen kirjoitetut koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitetuiksi koordinaattivektoreiksi. Toisin sanoen näytetään, että kaikilla $\bar{a} \in V$ pätee

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}[\bar{a}]_{\mathcal{R}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}.$$

Koska kannanvaihtomatriisit ovat lauseen 18.25 perusteella yksikäsitteisiä, seuraa tästä, että $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}$ on kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{R}$ kantaan $\mathcal{T}$.

Oletetaan, että $\bar{a} \in V$. Nyt

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}[\bar{a}]_{\mathcal{R}} = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}(P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}[\bar{a}]_{\mathcal{R}}) = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}.$$

Siten $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}$ on kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{R}$ kantaan $\mathcal{T}$ eli $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}} = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}}$. □

**Esimerkki 18.29.** Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kannat $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$, missä $\bar{v}_1 = (2,2,0)$, $\bar{v}_2 = (0,2,2)$, $\bar{v}_3 = (0,0,2)$ ja $\bar{w}_1 = (1,1,1)$, $\bar{w}_2 = (1,1,0)$, $\bar{w}_3 = (1,0,0)$. Selvitetään kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$. Tämä voitaisiin tehdä suoraan kannanvaihtomatriisin määritelmän perusteella, mutta käytetään hieman erilaista tapaa. Määritetään ensin kannanvaihtomatriisit kannoista $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ luonnolliseen kantaan $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Rakennetaan sen jälkeen näistä kahdesta matriisista kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$.

Aloitetaan kannanvaihtomatriisista $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}}$. Nyt on etsittävä kannan $\mathcal{S}$ vektorien koordinaattivektori kannan $\mathcal{E}$ suhteen. Tämä on hyvin helppoa. Koska

$$\bar{v}_1 = (2,2,0) = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 0\bar{e}_3,$$

saadaan $[\bar{v}_1]_{\mathcal{E}} = (2,2,0)$. Samalla tavalla $[\bar{v}_2]_{\mathcal{E}} = (0,2,2)$ ja $[\bar{v}_3]_{\mathcal{E}} = (0,0,2)$. Nyt kannanvaihtomatriisi on

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Samaan tapaan määritetään kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{T}$ kantaan $\mathcal{E}$:

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan muodostaa kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$ siirtymällä ensin kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{E}$ ja sitten kannasta $\mathcal{E}$ kantaan $\mathcal{T}$:

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}}.$$

Käytetään vielä hyväksi lausetta 18.27, jonka mukaan $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{T}})^{-1}$. Nyt siis

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{T}})^{-1} P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Edellä esitellyn menetelmän etu on, että vektorien koordinaatteja tarvitsee määrittää vain luonnollisen kannan suhteen ja se on aina helppoa. Varsinainen työ kätkeytyykin käänteismatriisin laskemiseen. (Käänteismatrisiin määrittämisen välivaiheet jätettiin tässä esimerkissä esittämättä.)

# 19 Lineaarikuvaus

Lineaarikuvaus on kuvaus vektoriavaruudelta toiselle. Se säilyttää vektoriavaruuden laskutoimitukset: vektorien summa kuvautuu kuvavektorien summaksi, ja vektorin skalaarimonikerta kuvautuu kuvavektorin skalaarimonikerraksi. Ei siis ole väliä kumpi tehdään ensin, kuvaaminen vai laskeminen.

**Määritelmä 19.1.** Olkoot $V$ ja $U$ vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$

b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Jos kuvaus $L$ on lineaarikuvaus, voidaan myös sanoa, että $L$ on *lineaarinen.* Merkintä $L\colon V \to U$ tarkoittaa, että vektoriavaruus $V$ on kuvauksen $L$ lähtöavaruus. Vektoriavaruus $U$ on puolestaan kuvauksen $L$ maaliavaruus.

**Esimerkki 19.2.** Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Osoitetaan, että $f$ on lineaarikuvaus (kuva 19.52).

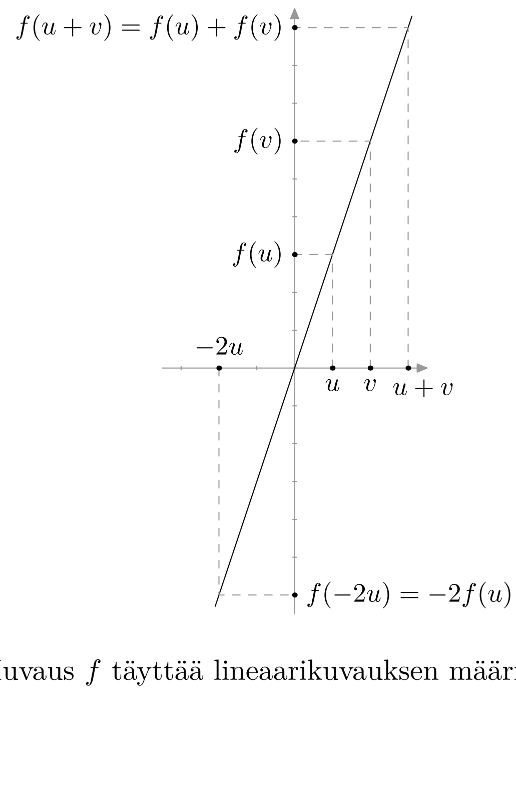
Oletetaan, että $v, u \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f(v + u) = 3(v + u) = 3v + 3u = f(v) + f(u)$$

ja

$$f(cv) = 3(cv) = c(3v) = cf(v).$$

Kuvaus $f$ täyttää siis lineaarikuvauksen määritelmän ehdot.



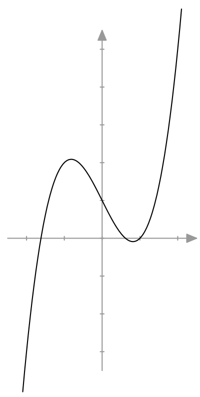

Kuva 19.52: Kuvaus $f$ täyttää lineaarikuvauksen määritelmän ehdot.

**Esimerkki 19.3.** Tarkastellaan kuvausta $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$. Osoitetaan, että $g$ ei ole lineaarikuvaus (kuva 19.53). Tämän osoittamiseen riittää yksi tapaus, jossa lineaarikuvauksen ehto ei toteudu.

Valitaan esimerkiksi $v = -1$ ja $w = 2$. Tällöin $g(v + w) = g(1) = 0$, mutta

$$g(v) + g(w) = g(-1) + g(2) = 2 + 5 = 7.$$

Siis $g(-1 + 2) \neq g(-1) + g(2)$, joten $g$ ei ole lineaarikuvaus.



Kuva 19.53: Kuvaus $g$ ei ole lineaarikuvaus.

**Esimerkki 19.4.** Osoitetaan, että kuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

on lineaarikuvaus. (Tässä vektorin $(x_1, x_2, x_3)$ kuvavektori pitäisi tarkalleen ottaen kirjoittaa muodossa $L((x_1, x_2, x_3))$ mutta on yleisesti sovittu, että toiset sulut saa tässä jättää pois.)

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$.

a) Huomataan, että

$$\begin{aligned} L(\bar{v} + \bar{w}) &= L(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = (7(v_2 + w_2),\ (v_1 + w_1) - 3(v_3 + w_3)) \\ &= (7v_2 + 7w_2,\ v_1 + w_1 - 3v_3 - 3w_3). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} L(\bar{v}) + L(\bar{w}) &= (7v_2,\ v_1 - 3v_3) + (7w_2,\ w_1 - 3w_3) \\ &= (7v_2 + 7w_2,\ v_1 + w_1 - 3v_3 - 3w_3), \end{aligned}$$

joten $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$.

b) Nähdään, että

$$L(c\bar{v}) = L(cv_1, cv_2, cv_3) = (7cv_2,\ cv_1 - 3cv_3) = c(7v_2,\ v_1 - 3v_3) = cL(\bar{v}).$$

Siten $L$ on lineaarikuvaus.

**Esimerkki 19.5.** Kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1x_2,\ x_1)$ ei ole lineaarikuvaus. Huomataan nimittäin, että

$$L((1,1) + (1,0)) = L(2,1) = (2,2)$$

ja

$$L(1,1) + L(1,0) = (1,1) + (0,1) = (1,2) \neq (2,2).$$

Siis $L((1,1) + (1,0)) \neq L(1,1) + L(1,0)$, eikä kuvaus siten ole lineaarikuvaus.

Vaihtoehtoisesti voidaan myös tarkastella lineaarikuvauksen jälkimmäistä ehtoa ja osoittaa, että se ei päde. Huomataan, että $L(2(1,1)) = L(2,2) = (4,2)$ ja $2L(1,1) = 2(1,1) = (2,2)$. Siten $L(2(1,1)) \neq 2L(1,1)$, eikä kuvaus ole lineaarikuvaus.

**Esimerkki 19.6.** Osoitetaan, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$ on lineaarikuvaus. Oletetaan, että $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned} L((a,b) + (c,d)) &= L(a+c, b+d) = (a+c)x + (b+d) \\ &= ax + b + cx + d = L(a,b) + L(c,d) \end{aligned}$$

ja

$$L(r(a,b)) = L(ra, rb) = rax + rb = r(ax+b) = rL(a,b).$$

Siten $L$ on lineaarikuvaus.

**Esimerkki 19.7.** Jos tiedetään kantavektorien arvot lineaarikuvauksessa, voidaan tämän avulla päätellä kaikkien muidenkin vektoreiden arvot.

Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,4,5)$ ja $L(0,1) = (0,-1,-1)$. Määritetään tämän tiedon avulla vaikkapa vektorin $(-3,4)$ kuva. Ensin kirjoitetaan vektori $(-3,4)$ annettujen kantavektoreiden lineaarikombinaationa: $(-3,4) = -3(1,0) + 4(0,1)$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} L(-3,4) &= L(-3(1,0) + 4(0,1)) = L(-3(1,0)) + L(4(0,1)) = -3L(1,0) + 4L(0,1) \\ &= -3(1,4,5) + 4(0,-1,-1) = (-3,-16,-19). \end{aligned}$$

Mistä tahansa matriisista saadaan lineaarikuvaus. Kuvauksen arvot määritetään kertomalla vektoreita matriisilla.

**Lause 19.8.** *Olkoon $A$ on $m \times n$-matriisi. Matriisin $A$ määräämä kuvaus $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$ on lineaarikuvaus.*

Tässä avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot tulkitaan $n \times 1$-matriiseiksi.

*Todistus.* Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt matriisien kertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$L_A(\bar{v} + \bar{w}) = A(\bar{v} + \bar{w}) = A\bar{v} + A\bar{w} = L_A(\bar{v}) + L_A(\bar{w})$$

ja

$$L_A(c\bar{v}) = A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = cL_A(\bar{v}).$$

Siten $L_A$ on lineaarinen. □

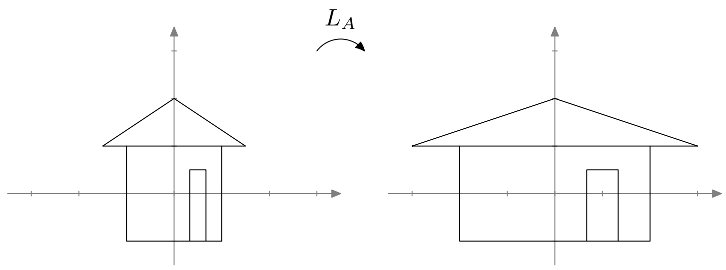
**Esimerkki 19.9.** Tutkitaan, millaisen lineaarikuvauksen määräävät matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisista $A$ saadaan kuvaus $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $(x_1, x_2)$ kuvautuu siis vektoriksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Toisin sanoen $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Tästä nähdään, että kuvaus $L_A$ *venyttää* vektoreita $x_1$-akselin suunnassa (kuva 19.54).

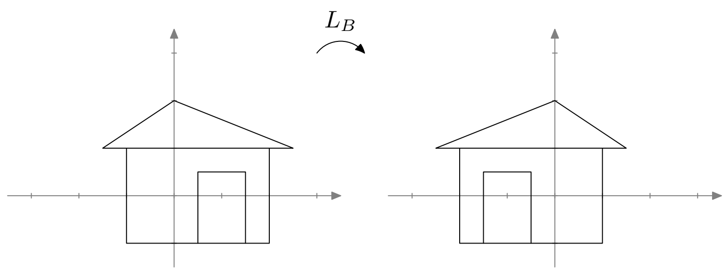



Kuva 19.54: Lineaarikuvaus $L_A$ venyttää vektoreita $x_1$-akselin suunnassa.

Matriisista $B$ saadaan puolestaan kuvaus $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

$$L_B\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus $L_B$ *peilaa* vektorit $x_2$-akselin suhteen (kuva 19.55).

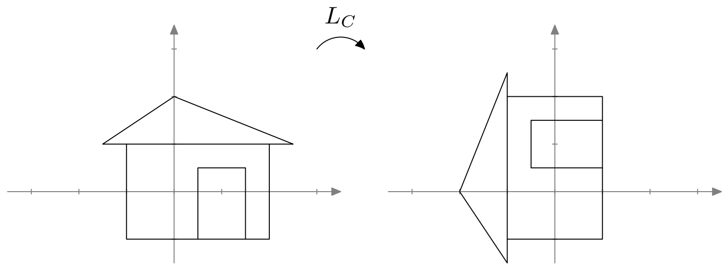



Kuva 19.55: Lineaarikuvaus $L_B$ peilaa vektorit $x_2$-akselin suhteen.

Matriisi $C$ määrää kuvauksen $L_C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

$$L_C\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus $L_C$ *kiertää* vektoreita $90^\circ$ vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan (kuva 19.56).




Kuva 19.56: Lineaarikuvaus $L_C$ kiertää vektoreita 90° positiiviseen kiertosuuntaan.

Voidaan osoittaa, että matriisin

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

määräämä lineaarikuvaus kiertää vektoreita origon ympäri kulman $\varphi$ verran (vastapäivään, jos $\varphi > 0$, ja myötäpäivään, jos $\varphi < 0$).

Tulemme myöhemmin osoittamaan, että jokainen lineaarikuvaus $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on jonkin matriisin määräämä kuvaus. Seuraavat esimerkit antavat tästä esimakua.

**Esimerkki 19.10.** Tutkitaan kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 4x_2 + x_3,\ 2x_1 + 4x_3,\ -x_2,\ 2x_2 + 3x_3).$$

Kuvaus $L$ on itse asiassa matriisin määräämä lineaarikuvaus eli kuvauksen $L$ arvot saadaan kertomalla vektoreita jollakin matriisilla. Selvitetään tämä matriisi.

Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorin $(x_1, x_2, x_3)$ kuvavektoria ja muokataan sitä niin, että kuvavektorissa näkyy matriisien tulo:

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_3 \\ -x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 \\ 0x_1 + (-1)x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Siten kuvaus $L$ on matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

määräämä kuvaus, jolle pätee $L(\bar{x}) = D\bar{x}$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Koska $L$ on matriisin määräämä kuvaus, se on lauseen 19.8 nojalla lineaarinen.

**Esimerkki 19.11.** Tarkastellaan kuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{e}_1}(\bar{v})$, joka projisoi tason $\mathbb{R}^2$ vektorit vektorin $(1, 0)$ virittämälle aliavaruudelle (ks. kuva 19.57). Jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, niin lauseen 13.14 perusteella

$$P(v_1, v_2) = \frac{(v_1, v_2) \cdot (1, 0)}{(1, 0) \cdot (1, 0)}(1, 0) = v_1(1, 0) = (v_1, 0).$$

Toisin sanoen $P(v_1, v_2) = (v_1, 0)$.

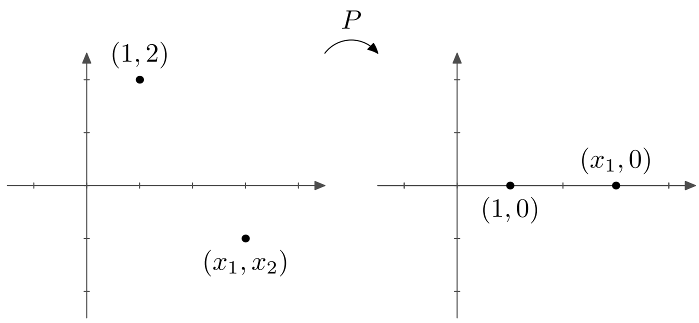
Osoitetaan, että kuvaus $P$ on lineaarinen etsimällä matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus $P$ on. Oletetaan, että $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$P\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

joten $P$ on matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

määräämä lineaarikuvaus. Siten $P$ on lineaarinen.




Kuva 19.57: Kuvaus $P$ projisoi vektorit vaaka-akselille.

Seuraava lause osoittaa, että lineaarikuvaus kuvaa nollavektorin aina nollavektoriksi.

**Lause 19.12.** *Jos $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus, niin $L(\bar{0}_V) = \bar{0}_U$.*

*Todistus.* Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Nyt

$$L(\bar{0}_V) = L(\bar{0}_V + \bar{0}_V) = L(\bar{0}_V) + L(\bar{0}_V).$$

Lisätään tämän yhtälön molemmille puolille avaruuden $U$ vektori $-L(\bar{0}_V)$, jolloin saadaan

$$L(\bar{0}_V) - L(\bar{0}_V) = L(\bar{0}_V) + L(\bar{0}_V) - L(\bar{0}_V).$$

Tästä seuraa, että $\bar{0}_U = L(\bar{0}_V)$. Siten väite on todistettu. $\square$

## 19.1 Lineaarikuvausten yhdistetyt kuvaukset

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ ja $T\colon U \to W$ ovat lineaarikuvauksia. *Yhdistetty kuvaus*[2] $T \circ L$ tarkoittaa kuvausta $V \to W$, jolle pätee

$$(T \circ L)(\bar{v}) = T(L(\bar{v})) \quad \text{eli} \quad \bar{v} \mapsto T(L(\bar{v}))$$

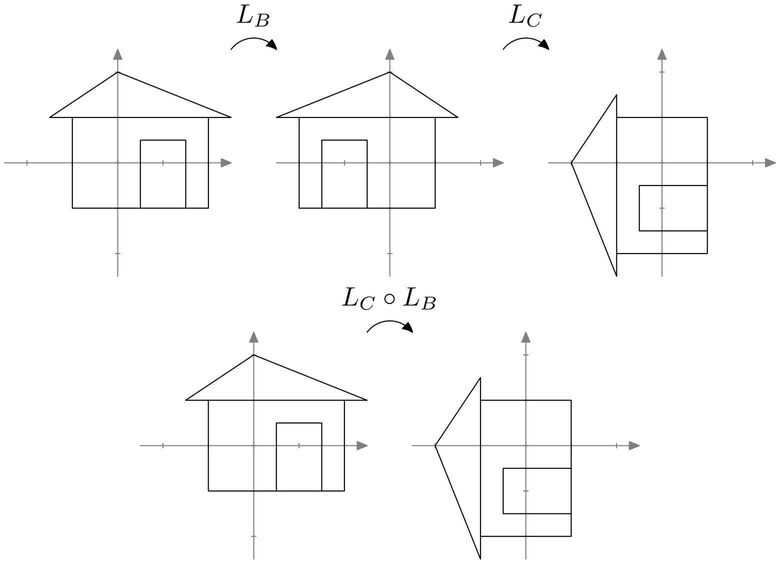
kaikilla $\bar{v} \in V$.

[2]Yhdistetyistä kuvauksista voidaan puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä. Tällä kurssilla keskitytään kuitenkin lineaarikuvauksiin.

**Esimerkki 19.13.** Esimerkissä 19.9 esiteltiin peilaus $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_B(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ ja kierto $L_C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_C(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Koska kuvauksen $L_B$ maalijoukko on sama kuin kuvauksen $L_C$ lähtöjoukko, voidaan määritellä yhdistetty kuvaus $L_C \circ L_B$. Tämä kuvaus ensin peilaa vektorit $x_2$-akselin suhteen ja sen jälkeen kiertää niitä 90° vastapäivään (ks. kuva 19.58). Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuvavektori on

$$(L_C \circ L_B)(x_1, x_2) = L_C(L_B(x_1, x_2)) = L_C(-x_1, x_2) = (-x_2, -x_1).$$

Saadaan siis kuvaus $L_C \circ L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$.




Kuva 19.58: Kuvaukset $L_B$ ja $L_C$ voidaan yhdistää.

**Lause 19.14.** *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ ja $T\colon U \to W$ ovat lineaarikuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $T \circ L\colon V \to W$ on lineaarinen.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tarkistetaan lineaarikuvauksen määritelmän ehdot:

a) Yhdistetyn kuvauksen määritelmän ja kuvausten $L$ ja $T$ lineaarisuuden avulla saadaan

$$\begin{aligned}(T \circ L)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) &= T(L(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) = T(L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2)) = T(L(\bar{v}_1)) + T(L(\bar{v}_2)) \\ &= (T \circ L)(\bar{v}_1) + (T \circ L)(\bar{v}_2)\end{aligned}$$

b) Nähdään, että

$$(T \circ L)(a\bar{v}_1) = T(L(a\bar{v}_1)) = T(aL(\bar{v}_1)) = aT(L(\bar{v}_1))) = a(T \circ L)(\bar{v}_1). \qquad \square$$

Jos kuvaukset ovat matriisien määräämiä lineaarikuvauksia, niiden yhdistäminen vastaa matriisien kertomista keskenään.

**Lause 19.15.** *Oletetaan, että $A$ on $m \times n$-matriisi ja $B$ on $p \times m$-matriisi. Tällöin*

$$L_B \circ L_A = L_{BA},$$

*eli tulomatriisin $BA$ määräämä kuvaus $L_{BA} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on sama kuvaus kuin yhdistetty kuvaus $L_B \circ L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin matriisien laskusääntöjen mukaan

$$L_{BA}(\bar{v}) = (BA)\bar{v} = B(A\bar{v}) = L_B(A\bar{v}) = L_B(L_A(\bar{v})) = (L_B \circ L_A)(\bar{v}).$$

Siis $L_{BA} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ja $L_B \circ L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ovat sama kuvaus. □

**Esimerkki 19.16.** Esimerkissä 19.9 kuvaus $L_B$ saatiin matriisista

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja kuvaus $L_C$ matriisista

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tulo on

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

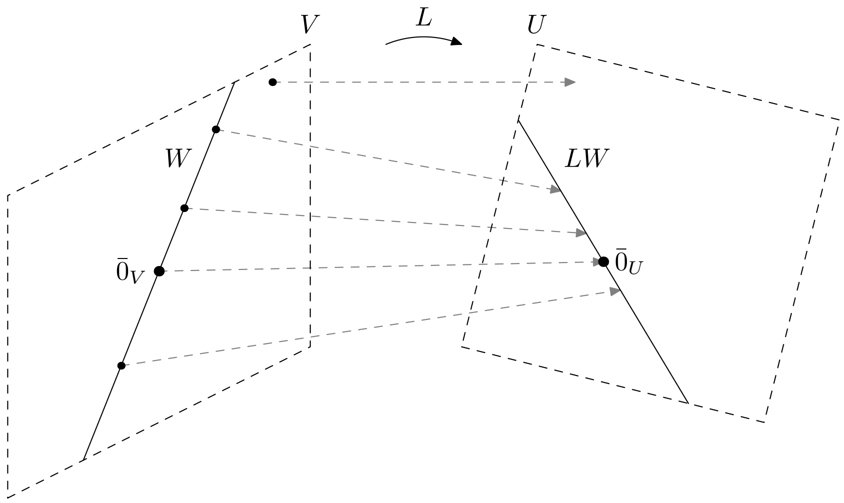
Tämä tulomatriisi määrittää kuvauksen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$. Toisaalta esimerkissä 19.13 nähtiin, että yhdistetylle kuvaukselle $L_C \circ L_B$ pätee $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$. Kyseessä on siis sama kuvaus aivan kuten lauseen 19.15 perusteella pitääkin olla.

## 19.2 Aliavaruuden kuva lineaarikuvauksessa

**Määritelmä 19.17.** Oletetaan, että $L \colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Vektoriavaruuden $V$ aliavaruuden $W$ *kuva* kuvauksessa $L$ on joukko

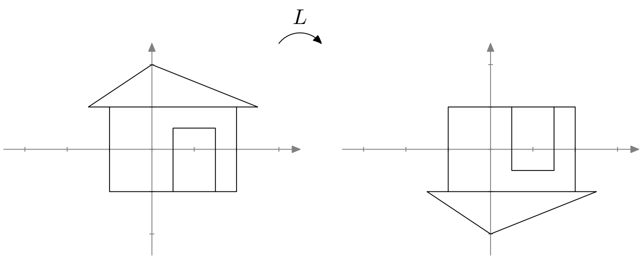
$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}.$$

Aliavaruuden kuva koostuu siis kaikista niistä maaliavaruuden vektoreista, joille kuvautuu jokin aliavaruuden $W$ vektori. Yleisesti kuvauksien yhteydessä voidaan puhua osajoukon kuvasta. Tällä kurssilla keskitytään kuitenkin lineaarikuvauksiin ja aliavaruuksien kuviin lineaarikuvauksissa.



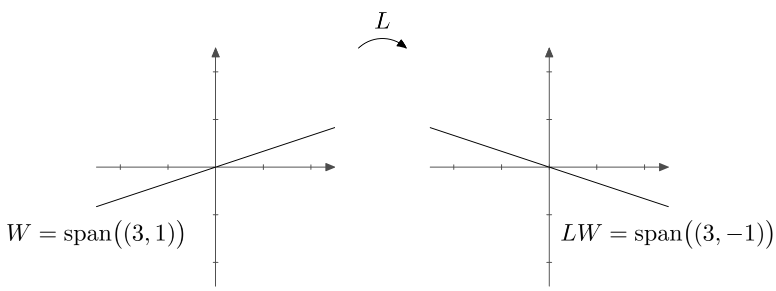

Kuva 19.59: Aliavaruuden $W$ kuva lineaarikuvauksessa $L$ on maaliavaruuden osajoukko.

**Esimerkki 19.18.** Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, joka peilaa jokaisen pisteen $x_1$-akselin suhteen.




Kuva 19.60: Lineaarikuvaus $L$ peilaa vektorit vaaka-akselin suhteen.

Selvitetään, mikä on aliavaruuden $W = \operatorname{span}\big((3,1)\big)$ kuva kuvauksessa $L$. Tutkitaan asiaa ensin piirroksen avulla (kuva 19.61). Aliavaruus $W$ on vektorin $(3,1)$ suuntainen origon kautta kulkeva suora. Koska $L$ peilaa kaiken $x_1$-akselin suhteen, tuntuisi järkeenkäyvältä, että myös suoran $W$ peilautuisi samaisen akselin suhteen. Suoran kuva olisi siten origon kautta kulkeva suora. Piirroksen perusteella tämän suoran virittäjä on vektori $(3,-1)$.




Kuva 19.61: Aliavaruus $W$ ja sen kuva $LW$.

Määritetään vielä täsmällisesti aliavaruuden $W$ kuva:

$$\begin{aligned}
LW &= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\} \\
&= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in \operatorname{span}\big((3,1)\big)\} \\
&= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} = t(3,1) \text{ jollakin } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{L(t(3,1)) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{tL(3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{t(3,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((3,-1)\big).
\end{aligned}$$

Näin ollen aliavaruuden $W$ kuva kuvauksessa $L$ on vektorin $(3,-1)$ virittämä aliavaruus.

**Esimerkki 19.19.** Määritetään aliavaruuden $W = \operatorname{span}((1,0,3),(0,2,-1))$ kuva lineaarikuvauksessa $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1,x_2,x_3) = (x_3,\ 2x_1 + x_2)$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
LW &= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\} \\
&= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} = a(1,0,3) + b(0,2,-1) \text{ joillakin } a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{L(a(1,0,3) + b(0,2,-1)) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{aL(1,0,3) + bL(0,2,-1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(3,2) + b(-1,2) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}((3,2),(-1,2)).
\end{aligned}$$

Siten $LW$ on vektoreiden $(3,2)$ ja $(-1,2)$ virittämä aliavaruus.

Edellisissä esimerkeissä aliavaruuden $W$ kuva oli aina myöskin alivaruus. Voidaan osoittaa, että lineaarikuvauksessa aliavaruudet kuvautuvat aliavaruuksiksi.

**Lause 19.20.** *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Jos $W$ on avaruuden $V$ aliavaruus, niin kuva*

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$$

*on avaruuden $U$ aliavaruus.*

*Todistus.* Lauseen todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

# 20 Ydin ja kuva

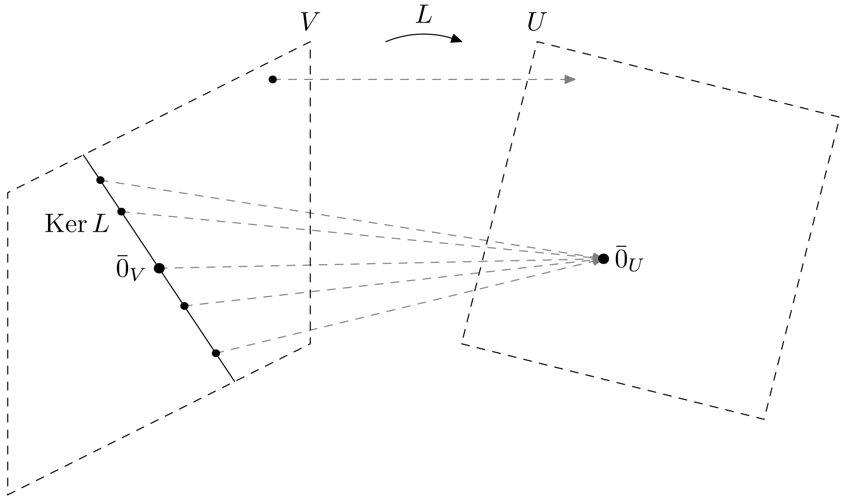
## 20.1 Lineaarikuvauksen ydin

Lineaarikuvauksen ydin koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektorille.

**Määritelmä 20.1.** Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *ydin* on joukko

$$\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

*Huom.* Lineaarikuvauksen $L\colon V \to U$ ydin on yksiön $\{\bar{0}_U\}$ alkukuva kuvauksessa $L$.




Kuva 20.62: Lineaarikuvauksen $L$ ydin koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektorille.

Tarkastellaan esimerkin 19.11 projektiokuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Esimerkiksi vektori $(0, -2)$ on kuvauksen $P$ ytimessä, sillä $P(0, -2) = (0, 0)$. Toisin sanoen $(0, -2) \in \operatorname{Ker} P$. Myös vaikkapa vektori $(0, \sqrt{5})$ on kuvauksen ytimessä.

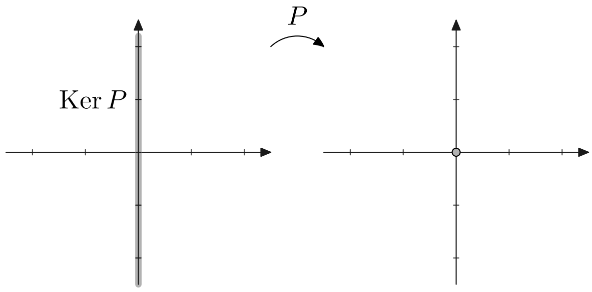
Huomaa, että ydin on aina joukko eikä jokin yksittäinen vektori. Monesti on olemassa useita vektoreita, jotka kuvautuvat nollavektorille. Ytimessä saattaa olla siis yksi alkio tai useampia alkioita. Lineaarikuvauksen ydin ei ole koskaan tyhjä joukko, sillä lauseen 19.12 mukaan nollavektori on aina kuvauksen ytimessä.

Merkintä Ker tulee englannin kielen sanasta ”kernel”, joka tarkoittaa ydintä.

**Esimerkki 20.2.** Määritetään projektiokuvauksen $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$, ytimen kaikki alkiot. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} P &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid P(\bar{v}) = \bar{0}\} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (v_1, 0) = (0, 0)\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 0\} = \{(0, v_2) \mid v_2 \in \mathbb{R}\} = \{v_2(0, 1) \mid v_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((0, 1)\big).\end{aligned}$$

Lineaarikuvauksen $P$ ydin on siis vektorin $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittämä aliavaruus eli origon kautta kulkeva, vektorin $\bar{e}_2$ suuntainen suora (ks. kuva 20.63).




Kuva 20.63: Lineaarikuvauksen $P$ ytimen vektorit kuvautuvat nollavektoriksi.

**Esimerkki 20.3.** Määritetään esimerkin 19.4 lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

ydin. Vektori $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on ytimessä, jos ja vain jos $(7x_2,\ x_1 - 3x_3) = (0, 0)$. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 7x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä

$$\begin{cases} x_1 &= 3s \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= s, \qquad \text{missä } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Siten $\operatorname{Ker} L = \{(3s, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Huomataan, että $\{(3s, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(3, 0, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ eli ydin $\operatorname{Ker} L$ on vektorin $(3, 0, 1)$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}\big((3, 0, 1)\big)$.

**Esimerkki 20.4.** Määritetään esimerkin 19.6 lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a, b) = ax+b$, ydin. Vektori $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on ytimessä, jos ja vain jos $ax + b$ on nollapolynomi 0. Tämä pätee, jos ja vain jos $a = 0$ ja $b = 0$. Siten $\operatorname{Ker} L = \{(0, 0)\}$.

Tässäkin tapauksessa ydin on siis aliavaruus.

**Lause 20.5.** *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Tällöin ydin* $\operatorname{Ker} L$ *on avaruuden $V$ aliavaruus.*

*Todistus.* Ensinnäkin $\operatorname{Ker} L$ on määritelmänsä mukaan vektoriavaruuden $V$ osajoukko.

Oletetaan, että $\bar{w}, \bar{u} \in \operatorname{Ker} L$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt siis $L(\bar{w}) = \bar{0}$ ja $L(\bar{u}) = \bar{0}$.

a) Kuvauksen $L$ lineaarisuuden nojalla $L(\bar{w} + \bar{u}) = L(\bar{w}) + L(\bar{u}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. Koska $L(\bar{w} + \bar{u}) = \bar{0}$ ja ytimeen kuuluvat kaikki nollavektorille kuvautuvat vektorit, pätee $\bar{w} + \bar{u} \in \operatorname{Ker} L$.

b) Kuvauksen $L$ lineaarisuuden nojalla myös $L(c\bar{w}) = cL(\bar{w}) = c\bar{0} = \bar{0}$. Koska $L(c\bar{w}) = \bar{0}$ ja ytimeen kuuluvat kaikki nollavektorille kuvautuvat vektorit, pätee $c\bar{w} \in \operatorname{Ker} L$.

c) Lauseen 19.12 perusteella $L(\bar{0}_V) = \bar{0}_U$, joten $\bar{0}_V \in \operatorname{Ker} L$.

Siten $\operatorname{Ker} L$ on avaruuden $V$ aliavaruus. □

Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on *injektiivinen*[3] tai *injektio*, jos eri vektoreilla on aina eri kuvat. Toisin sanoen kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ehdosta $L(\bar{v}) = L(\bar{w})$ seuraa $\bar{v} = \bar{w}$. Kullekin maalijoukon alkiolle kuvautuu siis korkeintaan yksi lähtöjoukon alkio.

Vaikkapa esimerkin 19.11 projektiokuvaus $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ei ole injektio, sillä $P(1,1) = (1,0)$ ja $P(1,2) = (1,0)$.

Lineaarikuvauksen ydin kertoo, onko kuvaus injektio.

**Lause 20.6.** *Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on injektio, jos ja vain jos* $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.

*Todistus.* ”$\Rightarrow$”: Oletetaan ensin, että $L$ on injektio. Osoitetaan, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Tiedetään, että $L(\bar{0}) = \bar{0}$, joten $\bar{0} \in \operatorname{Ker} L$. Injektiivisyyden nojalla mikään muu vektori ei voi kuvautua nollavektorille, joten ytimessä on vain yksi vektori, $\bar{0}$.

”$\Leftarrow$”: Oletetaan sitten, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Osoitetaan, että $L$ on injektio. Oletetaan, että vektoreille $\bar{v}, \bar{w} \in V$ pätee $L(\bar{v}) = L(\bar{w})$. Lisäämällä yhtälön molemmille puolille vektori $-L(\bar{w})$, saadaan $L(\bar{v}) - L(\bar{w}) = \bar{0}$. Koska $L$ on lineaarikuvaus, seuraa tästä, että $L(\bar{v} - \bar{w}) = \bar{0}$. Siis $\bar{v} - \bar{w}$ on ytimen alkio. Koska $\operatorname{Ker}(L) = \{\bar{0}\}$, täytyy päteä $\bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$. Kun tämän yhtälön molemmille puolille lisätään vektori $\bar{w}$, saadaan $\bar{v} = \bar{w}$. On siis osoitettu, että $L$ on injektio. □

**Esimerkki 20.7.** Esimerkissä 20.3 nähtiin, että lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$, ydin on $\{(3s, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Koska ytimessä on muitakin vektoreita kuin nollavektori, ei kuvaus ole injektio.

Esimerkissä 20.4 puolestaan pääteltiin, että lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$, ydin on $\{(0,0)\}$. Koska ytimen ainoa vektori on nollavektori, on kuvaus injektio.

## 20.2 Lineaarikuvauksen kuva

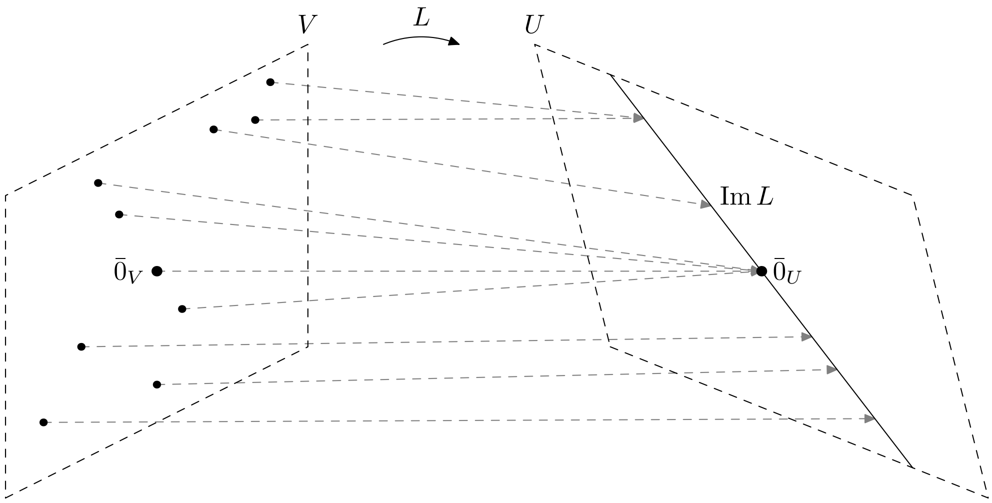
Aiemmin käsittelimme aliavaruuden kuvaa lineaarikuvauksessa. Vektoriavaruus on aina itsensä aliavaruus, ja monesti onkin kiinnostavaa tutkia koko lähtöavaruuden kuvaa. Toisin sanoen tutkitaan niiden maaliavaruuden vektoreiden joukkoa, joille kuvautuu jotakin.

**Määritelmä 20.8.** Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *kuva* on joukko

$$\operatorname{Im} L = LV = \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\}.$$

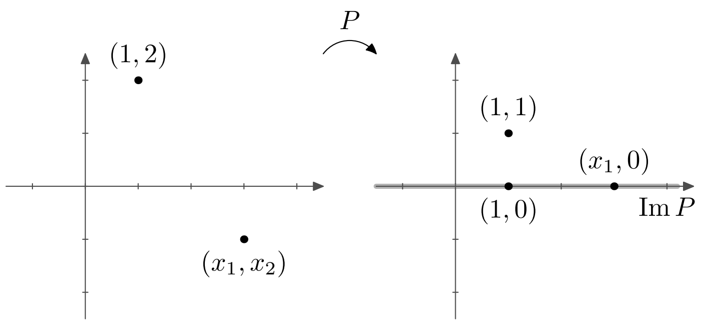
Lineaarikuvauksen kuva on erikoistapaus aiemmin määritellystä aliavaruuden kuvasta. Nyt aliavaruutena on koko vektoriavaruus $V$. Lineaarikuvauksen kuva on sama asia kuin koulusta tuttu arvo- eli kuvajoukko. Merkintä Im tulee englannin kielen sanasta ”image”, joka tarkoittaa kuvaa.

[3] Injektiivisyydestä voidaan puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä.




Kuva 20.64: Lineaarikuvauksen $L$ kuvalla tarkoitetaan lähtöavaruuden kuvaa.

**Esimerkki 20.9.** Tutkitaan jälleen kuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$, joka projisoi vektorit $x_1$-akselille. Muun muassa vektori $(1,0)$ on kuvan $\operatorname{Im} P$ alkio, sillä se on esimerkiksi alkion $(1,2)$ kuvavektori (kuva 20.65). Vektori $(1,1)$ puolestaan ei ole kuvan $\operatorname{Im} P$ alkio, sillä mikään vektori ei kuvaudu (eli projisoidu) vektorille $(1,1)$. Projektio $P$ on nimittäin määritelty niin, että kuvavektorin toinen komponentti on aina nolla.



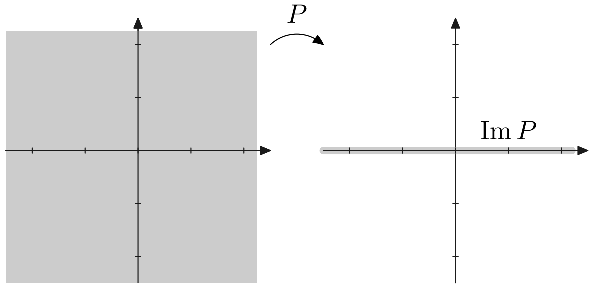

Kuva 20.65: Vektori $(1,0)$ on kuvauksen $P$ kuvassa, mutta vektori $(1,1)$ ei ole.

Määritetään sitten projektiokuvauksen $P$ kuva eli kaikki ne maaliavaruuden vektorit, joille kuvautuu jotakin. Tutkitaan asiaa ensin hieman epätäsmällisesti. Koska $P$ projisoi vektoreita $x_1$-akselille, ovat kaikki kuvavektorit $x_1$-akselin suuntaisia vektoreita. Toisaalta jokaiselle $x_1$-akselin suuntaiselle vektorille projisoituu jotakin. (Jokainen $x_1$-akselin suuntainen vektori on oma projektionsa.) Siten kuva $\operatorname{Im} P$ näyttää koostuvan kaikista $x_1$-akselin suuntaisista vektoreista. Toisin sanoen $\operatorname{Im} P = \operatorname{span}((1,0))$.

Määritetään vielä täsmällisesti lineaarikuvauksen $P$ kuva:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} P &= \{P(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^2\} = \{P(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}((1,0)).
\end{aligned}$$

Siten $\operatorname{Im} P = \operatorname{span}((1,0))$ aivan kuten arveltiinkin (kuva 20.66).




Kuva 20.66: Lineaarikuvauksen $P$ kuva on vektorin $\bar{e}_1$ virittämä aliavaruus.

**Esimerkki 20.10.** Tutkitaan lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$L(x_1, x_2) = (4x_1 + 10x_2,\ \sqrt{5}x_1 + x_2,\ -3x_2),$$

kuvaa $\operatorname{Im} L$, joka on avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} L &= \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{L(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(4v_1 + 10v_2,\ \sqrt{5}v_1 + v_2,\ -3v_2) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(4v_1, \sqrt{5}v_1, 0) + (10v_2, v_2, -3v_2) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v_1(4, \sqrt{5}, 0) + v_2(10, 1, -3) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}((4, \sqrt{5}, 0), (10, 1, -3)).
\end{aligned}$$

Siten kuva $\operatorname{Im} L$ on vektorien $(4, \sqrt{5}, 0)$ ja $(10, 1, -3)$ virittämä aliavaruus.

**Esimerkki 20.11.** Määritetään esimerkin 19.6 lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $(a, b) \mapsto ax + b$ kuva. Nähdään, että

$$\operatorname{Im} L = \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{R}^2\} = \{L(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} = \{v_1 x + v_2 \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_1.$$

Siten kuva on koko avaruus $\mathcal{P}_1$.

Lineaarikuvauksen kuva on aina maaliavaruuden aliavaruus.

**Lause 20.12.** *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Tällöin kuva* $\operatorname{Im} L$ *on avaruuden $U$ aliavaruus.*

*Todistus.* Vektoriavaruus $V$ on itsensä aliavaruus. Nyt lauseen 19.20 nojalla kuva $LV = \operatorname{Im} L$ on avaruuden $U$ aliavaruus. □

**Esimerkki 20.13.** Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolla $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$. (Lauseen 19.8 nojalla tiedetään, että kysymyksessä on lineaarikuvaus). Tämän lineaarikuvauksen kuva on määritelmän 20.8 mukaan

$$\operatorname{Im} L_A = \{L_A(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^2\} = \{A\bar{x} \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Oletetaan, että $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ ja lasketaan tulo $A\bar{x}$:

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Havaitaan, että lineaarikuvauksen $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kuvan muodostavat matriisin $A$ sarakkeiden lineaarikombinaatiot. Kuva $\operatorname{Im} L_A$ on siis matriisin $A$ sarakkeiden virittämä avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Lineaarikuvaus $L \colon V \to U$ on *surjektiivinen*[4] eli *surjektio*, jos jokaiselle avaruuden $U$ alkiolle kuvautuu jokin avaruuden $V$ alkio. Siten lineaarikuvaus $L \colon V \to U$ on surjektio, jos ja vain jos sen kuva on koko maaliavaruus eli $\operatorname{Im} L = U$.

Lineaarikuvausta $L \colon V \to U$ voidaan nyt luonnehtia sen ytimen ja kuvan avulla.

- Kuvaus $L$ on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.
- Kuvaus $L$ on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = U$.

[4]Surjektiivisuudesta voidaa puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä.

## 21 Isomorfismi

Kuvaus on *bijektiivinen* eli *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio. Tällöin kullekin maalijoukon alkiolle kuvautuu täsmälleen yksi lähtöjoukon alkio.

**Määritelmä 21.1.** *Isomorfismi* on bijektiivinen lineaarikuvaus.

Jos vektoriavaruuksien $V$ ja $U$ välillä on isomorfismi, sanotaan, että $V$ ja $U$ ovat *isomorfiset*. Tällöin merkitään $V \cong U$. Isomorfiset vektoriavaruudet ovat ominaisuuksiltaan samankaltaiset.

**Esimerkki 21.2.** Osoitetaan, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$ on isomorfismi. Esimerkin 19.6 perusteella kuvauksen tiedetään olevan lineaarikuvaus. Lisäksi on osoitettava, että kuvaus on bijektio eli että kuvaus on sekä injektio että surjektio. Kuvauksen ydin $\operatorname{Ker} L$ on esimerkin 20.4 mukaan $\{(0,0)\}$, joten kuvaus on injektio. Kuva $\operatorname{Im} L$ puolestaan on esimerkin 20.11 nojalla koko maalijoukko $\mathcal{P}_1$. Siten $L$ on surjektio. Näin ollen $L$ on bijektio ja edelleen isomorfismi.

Koska $L$ on isomorfismi, vektorivaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $\mathcal{P}_1$ ovat isomorfisia. Huomataan, että avaruudet muistuttavat toisiaan. Sekä alkiossa $(a,b)$ että alkiossa $ax+b$ näkyvät reaaliluvut $a$ ja $b$. Kaikki oleellinen tieto alkiosta sisältyy näihin reaalilukuihin. Lisäksi nämä reaaliluvut käyttäytyvät samalla tavoin yhteenlaskussa ja skalaarikertolaskussa. Tätä on havainnollistettu taulukossa 21.1.

| Vektoriavaruus | summa |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ |
| $\mathcal{P}_1$ | $(ax+b)+(cx+d)=(a+c)x+(b+d)$ |

| Vektoriavaruus | skalaarimonikerta |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $r(a,b)=(ra,rb)$ |
| $\mathcal{P}_1$ | $r(ax+b)=rax+rb$ |

Taulukko 21.1: Vektorien yhteenlasku ja skalaarikertolasku avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathcal{P}_1$.

**Määritelmä 21.3.** Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on kuvaus. Jos on olemassa kuvaus $T\colon U \to V$, jolle pätee

$$T \circ L = \mathrm{id}_V \quad \text{ja} \quad L \circ T = \mathrm{id}_U,$$

sanotaan, että kuvaus $T$ on kuvauksen $L$ *käänteiskuvaus*.

Tässä merkintä $\mathrm{id}_V$ tarkoittaa avaruuden $V$ *identtistä kuvausta*: $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, jolla $\bar{v} \mapsto \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$. Vastaavasti $\mathrm{id}_U$ tarkoittaa avaruuden $U$ identtistä kuvausta. Käänteiskuvauksen ehto voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$T(L(\bar{v})) = \bar{v} \quad \text{kaikilla } \bar{v} \in V \qquad \text{ja} \qquad L(T(\bar{u})) = \bar{u} \quad \text{kaikilla } \bar{u} \in U.$$

Kuvauksen $L$ käänteiskuvausta merkitään $L^{-1}$. Kaikilla kuvauksilla ei ole käänteiskuvausta. Huomaa, että käänteiskuvauksista voidaan puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä.

**Esimerkki 21.4.** Osoitetaan, että kuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax+b$ käänteiskuvaus on kuvaus $T\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$, $T(ax+b) = (a,b)$. Olkoon $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$(T \circ L)(a,b) = T(L(a,b)) = T(ax+b) = (a,b),$$

joten $T \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Toisaalta

$$(L \circ T)(ax+b) = L(T(ax+b)) = L(a,b) = ax+b,$$

joten $L \circ T = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_1}$. Siten $T$ on kuvauksen $L$ käänteiskuvaus eli $T = L^{-1}$.

Voidaan osoittaa, että kuvauksella $L$ on käänteiskuvaus, jos ja vain jos $L$ on bijektio. Tästä saadaan seuraava tulos:

**Lause 21.5.** *Lineaarikuvaus on isomorfismi, jos ja vain jos sillä on käänteiskuvaus.*

Lineaarikuvauksen käänteiskuvaus on aina lineaarinen, kuten seuraava lause osoittaa.

**Lause 21.6.** *Jos lineaarikuvauksella on käänteiskuvaus, niin käänteiskuvaus on lineaarinen.*

*Todistus.* Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus, jolla on käänteiskuvaus $L^{-1}\colon U \to V$. Tällöin $L$ on isomorfismi lauseen 21.5 nojalla.

Oletetaan, että $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2 \in U$ ja $c \in \mathbb{R}$. Koska $L$ on isomorfismina surjektiivinen, on olemassa vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in V$, joille pätee $L(\bar{v}_1) = \bar{u}_1$ ja $L(\bar{v}_2) = \bar{u}_2$. Huomaa, että tällöin $\bar{v}_1 = L^{-1}(\bar{u}_1)$ ja $\bar{v}_2 = L^{-1}(\bar{u}_2)$. Nyt

$$\begin{aligned} L^{-1}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) &= L^{-1}(L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2)) = L^{-1}(L(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \\ &= L^{-1}(\bar{u}_1) + L^{-1}(\bar{u}_2) \end{aligned}$$

ja

$$L^{-1}(c\bar{u}_1) = L^{-1}(cL(\bar{v}_1)) = L^{-1}(L(c\bar{v}_1)) = c\bar{v}_1 = cL^{-1}(\bar{u}_1).$$

Siten $L^{-1}$ on lineaarikuvaus. □

**Lause 21.7.** *Oletetaan, että $V$, $U$ ja $W$ ovat vektoriavaruuksia. Tällöin*

*a) $V \cong V$*

*b) jos $V \cong U$, niin $U \cong V$*

*c) jos $V \cong U$ ja $U \cong W$, niin $V \cong W$.*

*Todistus.*

a) Ei ole vaikea osoittaa, että identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(\bar{v}) = \bar{v}$ on bijektiivinen lineaarikuvaus. Siten se on isomorfismi vektoriavaruudelta $V$ itselleen.

b) Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on isomorfismi. Tällöin sillä on käänteiskuvaus $L^{-1}\colon U \to V$, joka on lineaarinen lauseen 21.6 nojalla. Lisäksi lineaarikuvauksella $L^{-1}$ on käänteiskuvaus $L$. Siten $L^{-1}$ on isomorfismi lauseen 21.5 nojalla.

c) Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

# 22 Kanta ja lineaarikuvaukset

Esimerkissä 19.7 näytettiin, miten kantavektorien kuvavektoreista voidaan johtaa kaikkien muidenkin vektorien kuvavektorit, jos kuvauksen tiedetään olevan lineaarikuvaus. Vieläkin vahvempi tulos pitää paikkansa. Lineaarikuvaus voidaan jopa *määritellä* antamalla pelkkien kantavektorien arvot.

Tulemme näkemään, että on mahdollista määritellä lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ asettamalla esimerkiksi

$$L(\bar{e}_1) = (1, 5, -2), \quad L(\bar{e}_2) = (0, 0, 0), \quad L(\bar{e}_3) = (-1, 2, 6), \quad L(\bar{e}_4) = (7, 4, 4).$$

Tästä kuvauksesta ei tarvitse antaa mitään muuta tietoa kun arvot kantavektoreilla. Seuraava lause nimittäin osoittaa, että on todellakin olemassa lineaarikuvaus, joka toteuttaa nämä neljä ehtoa, eikä muita ehdot täyttäviä lineaarikuvauksia ole.

**Lause 22.1.** *Olkoot $V$ ja $U$ vektoriavaruuksia. Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on avaruuden $V$ kanta ja $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n \in U$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarikuvaus $L\colon V \to U$, jolle pätee $L(\bar{v}_i) = \bar{u}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

*Todistus.* Koska $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on oletuksen mukaan avaruuden $V$ kanta, niin jokaisella $\bar{w} \in V$ on olemassa yksikäsitteiset reaaliluvut $w_1 \ldots, w_n$, joille pätee $\bar{w} = w_1\bar{v}_1 + w_2\bar{v}_2 + \cdots + w_n\bar{v}_n$. Määritellään kuvaus $L\colon V \to U$ asettamalla

$$L(\bar{w}) = w_1\bar{u}_1 + w_2\bar{u}_2 + \cdots + w_n\bar{u}_n,$$

missä luvut $w_1 \ldots, w_n$ ovat kuten yllä. (Kyseessä ovat siis vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ suhteen.) Koska kertoimet $w_1, \ldots w_n$ ovat yksikäsitteiset, on vektorin $\bar{w}$ kuvavektori $L(\bar{w})$ yksikäsitteisesti määrätty. Lisäksi koska $U$ on vektoriavaruus ja $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n \in U$, niin myös lineaarikombinaatio $w_1\bar{u}_1 + w_2\bar{u}_2 + \cdots + w_n\bar{u}_n \in U$. Näin vektorin $\bar{w}$ kuvavektori $L(\bar{w})$ kuuluu maaliin $U$. Siis $L$ on todella kuvaus $V \to U$.

Osoitetaan, että $L$ on etsitty kuvaus. Näytetään ensin, että kantavektorit kuvautuvat halutulla tavalla. Jos $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$\bar{v}_i = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_{i-1} + 1\bar{v}_i + 0\bar{v}_{i+1} + 0\bar{v}_n.$$

Siten kuvauksen $L$ määritelmän mukaan

$$L(\bar{v}_i) = 0\bar{u}_1 + \cdots + 0\bar{u}_{i-1} + 1\bar{u}_i + 0\bar{u}_{i+1} + 0\bar{u}_n = \bar{u}_i.$$

Näytetään lisäksi, että $L$ on lineaarikuvaus. Oletetaan, että $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Nyt

$$\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n \quad \text{ja} \quad \bar{y} = y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n$$

joillakin $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
L(\bar{x} + \bar{y}) &= L\big((x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n) + (y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n)\big) \\
&= L\big((x_1 + y_1)\bar{v}_1 + (x_2 + y_2)\bar{v}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\bar{v}_n\big) \\
&= (x_1 + y_1)\bar{u}_1 + (x_2 + y_2)\bar{u}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\bar{u}_n \\
&= (x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \cdots + x_n\bar{u}_n) + (y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2 + \cdots + y_n\bar{u}_n) \\
&= L(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n) + L(y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n) \\
&= L(\bar{x}) + L(\bar{y}).
\end{aligned}$$

Oletetaan vielä, että $c \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}
L(c\bar{x}) &= L\big(c(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n)\big) \\
&= L(cx_1\bar{v}_1 + cx_2\bar{v}_2 + \cdots + cx_n\bar{v}_n) \\
&= cx_1\bar{u}_1 + cx_2\bar{u}_2 + \cdots + cx_n\bar{u}_n \\
&= c(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \cdots + x_n\bar{u}_n) \\
&= cL(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n) \\
&= cL(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Siten $L$ on lineaarikuvaus. On siis olemassa vähintään yksi kuvaus, joka täyttää annetut ehdot.

Osoitetaan sitten, että lauseen vaatimukset täyttäviä lineaarikuvauksia on enintään yksi. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ ja $T\colon V \to U$ ovat molemmat lineaarikuvauksia, joille pätee

$$\begin{aligned}
&L(\bar{v}_1) = \bar{u}_1, L(\bar{v}_2) = \bar{u}_2, \ldots, L(\bar{v}_n) = \bar{u}_n \quad \text{ja} \\
&T(\bar{v}_1) = \bar{u}_1, T(\bar{v}_2) = \bar{u}_2, \ldots, T(\bar{v}_n) = \bar{u}_n.
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että kuvaukset $L$ ja $T$ ovat samat.

Oletetaan, että $\bar{v} \in V$. Tällöin $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, sillä $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on avaruuden $V$ kanta. Kuvausten $L$ ja $T$ lineaarisuutta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
L(\bar{v}) &= L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_nL(\bar{v}_n) \\
&= a_1\bar{u}_1 + \cdots + a_n\bar{u}_n = a_1T(\bar{v}_1) + \cdots + a_nT(\bar{v}_n) \\
&= T(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = T(\bar{v}).
\end{aligned}$$

Kuvauksilla $L\colon V \to U$ ja $T\colon V \to U$ on samat arvot, joten ne ovat sama kuvaus.

Siten lauseen ehdot täyttäviä lineaarikuvauksia on täsmälleen yksi. □

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden tapauksessa lineaarikuvauksen ytimen ja kuvan dimensiot riippuvat toisistaan.

**Lause 22.2** (Dimensiolause)**.** *Olkoot $V$ ja $U$ vektoriavaruuksia. Oletetaan, että $V$ on äärellisulotteinen. Olkoon $L\colon V \to U$ lineaarikuvaus. Tällöin*

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L).$$

*Todistus.* Olkoon $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta. Koska jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, se voidaan lauseen 18.11 nojalla täydentää vektoriavaruuden $V$ kannaksi $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots \bar{u}_n)$. Nyt siis $\dim(\operatorname{Ker} L) = k$ ja $\dim(V) = n$. Osoitetaan, että $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots L(\bar{u}_n))$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta, jolloin $\dim(\operatorname{Im} L) = n - k$. Tämä todistaa väitteen.

Osoitetaan ensin, että $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots, L(\bar{u}_n))$ virittää aliavaruuden $\operatorname{Im} L$. Olkoon $\bar{w} \in \operatorname{Im} L$. Tällöin on olemassa $\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{w} = L(\bar{v})$. Toisaalta tiedetään, että $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots \bar{u}_n)$ on avaruuden $V$ kanta, joten

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + a_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + a_n\bar{u}_n$$

joillakin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}\bar{w} = L(\bar{v}) &= L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + a_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + a_n\bar{u}_n) \\ &= a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_kL(\bar{v}_k) + a_{k+1}L(\bar{u}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\bar{u}_n) \\ &= \bar{0} + \cdots + \bar{0} + a_{k+1}L(\bar{u}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\bar{u}_n),\end{aligned}$$

sillä $L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k) \in \operatorname{Ker} L$. Siten jokainen aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ alkio voidaan kirjoittaa vektoreiden $L(\bar{u}_{k+1}), \ldots, L(\bar{u}_n)$ lineaarikombinaationa eli

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots L(\bar{u}_n)).$$

Osoitetaan sitten, että jono $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots L(\bar{u}_n))$ on vapaa. Oletetaan, että

$$c_{k+1}L(\bar{u}_{k+1}) + \cdots + c_nL(\bar{u}_n) = \bar{0}$$

joillakin $c_{k+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Nyt

$$L(c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n) = \bar{0},$$

joten $c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n \in \operatorname{Ker} L$. Näin ollen vektori $c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n$ voidaan kirjoittaa aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kannan alkioiden lineaarikombinaationa. On siis olemassa luvut $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k.$$

Tästä saadaan yhtälö

$$-b_1\bar{v}_1 - \cdots - b_k\bar{v}_k + c_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \cdots + c_n\bar{u}_n = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots \bar{u}_n)$ on kuitenkin vektoriavaruuden $V$ kanta, joten se on vapaa. Kaikkien lineaarikombinaation kertoimien pitää siis olla nollia:

$$b_1 = 0, \ldots, b_k = 0, c_{k+1} = 0, \ldots, c_n = 0.$$

Näin ollen tiedetään, että $c_{k+1} = 0, \ldots, c_n = 0$, mistä seuraa, että alunperin tutkittu jono $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots L(\bar{u}_n))$ on vapaa. Siten $(L(\bar{u}_{k+1}), \ldots L(\bar{u}_n))$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta.

Nyt nähdään, että $\dim(\operatorname{Im} L) = n - k$, $\dim(\operatorname{Ker} L) = k$ ja $\dim V = n$. Tästä seuraa, että $\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L)$, joten väite on todistettu. □

**Esimerkki 22.3.** Tarkastellaan esimerkissä 19.11 esiintynyttä projektiokuvausta $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Esimerkissä 20.2 osoitettiin, että $\operatorname{Ker} P = \operatorname{span}((0, 1))$, ja esimerkissä 20.9 näytettiin, että $\operatorname{Im} P = \operatorname{span}((1, 0))$. Nyt nähdään, että

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 1 + 1 = \dim(\operatorname{Ker} P) + \dim(\operatorname{Im} P)$$

aivan kuten Dimensiolauseen mukaan kuuluukin olla.

Jos lähtö- ja maaliavaruuden dimensiot ovat samat (ja äärelliset), ovat kaikki injektiot surjektioita ja surjektiot injektioita.

**Lause 22.4.** *Oletetaan, että $V$ ja $U$ ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, joille pätee* $\dim(V) = \dim(U)$*. Olkoon $L\colon V \to U$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

*a) $L$ on injektio*

*b) $L$ on surjektio.*

Huomaa, että lauseessa oletetaan, että lineaarikuvauksen lähtö- ja maaliavaruudella on sama dimensio. Jos tämä ehto ei ole voimassa, ei lauseen tuloskaan välttämättä päde.

*Todistus.* On osoitettava, että väite a) pätee, jos ja vain jos väite b) pätee. Perustana on Dimensiolause 22.2, jonka mukaan $\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L)$.

"a) $\Rightarrow$ b)": Oletetaan, että $L$ on injektio. Nyt lauseen 20.6 nojalla $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, joten $\dim(\operatorname{Ker} L) = 0$. Tästä seuraa, että

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker} L) = \dim(V) = \dim(U),$$

koska oletimme, että avaruuksien $V$ ja $U$ dimensiot ovat samat. Nyt tiedetään, että kuva $\operatorname{Im} L$ on vektoriavaruuden $U$ aliavaruus, jolla on sama dimensio kuin avaruudella $U$. Lauseen 18.15 perusteella $\operatorname{Im} L = U$. Siten $L$ on surjektio.

"b) $\Rightarrow$ a)": Oletetaan sitten, että $L$ on surjektio. Nyt tiedetään, että $\operatorname{Im} L = U$. Tästä seuraa $\dim(\operatorname{Im} L) = \dim(U) = \dim(V)$ ja edelleen

$$\dim(\operatorname{Ker} L) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im} L) = 0.$$

Siten $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, ja $L$ on injektio. □

Jos äärellisulotteiset vektoriavaruudet ovat isomorfiset, niiden dimensiot ovat samat. Myös käänteinen väite pätee. Jos vektoriavaruuksien dimensiot ovat samat, ne ovat isomorfiset. Äärellisulotteisen vektoriavaruuden dimensio riittää siis kertomaan vektoriavaruudesta kaiken oleellisen.

**Lause 22.5.** *Oletetaan, että $V$ ja $W$ ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia. Vektoriavaruudet $V$ ja $W$ ovat isomorfiset, jos ja vain jos* $\dim(V) = \dim(W)$*.*

*Todistus.* "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $V$ ja $W$ ovat isomorfiset. Tällöin on olemassa bijektiivinen lineaarikuvaus $L\colon V \to W$. Koska $L$ on injektio, niin $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Dimensiolauseen 22.2 nojalla pätee

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker} L) = \dim(V) - 0 = \dim(V).$$

Toisaalta $L$ on myös surjektio, joten $\operatorname{Im} L = W$. Siis

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Im} L) = \dim(W).$$

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\dim(V) = \dim(W) = n$. Vektoriavaruuksien välinen isomorfismi saadaan kuvaamalla avaruuden $V$ kantavektorit avaruuden $W$ kantavektoreille. Olkoon siis $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ vektoriavaruuden $V$ kanta ja $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ vektoriavaruuden $W$ kanta. Olkoon $L\colon V \to W$ se lineaarikuvaus, jolle pätee

$$L(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, L(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \ldots, L(\bar{v}_n) = \bar{w}_n.$$

Lauseen 22.1 mukaan tällaisia lineaarikuvauksia on täsmälleen yksi. Osoitetaan, että $L$ on bijektio.

Näytetään ensin, että $L$ on injektio osoittamalla, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. On siis näytettävä, että ytimessä on ainoastaan nollavektori. Oletetaan, että $\bar{v} \in \operatorname{Ker} L$. Tällöin $L(\bar{v}) = \bar{0}$. Kirjoitetaan $\bar{v}$ kantavektorien lineaarikombinaationa: $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Nyt saadaan

$$\bar{0} = L(\bar{v}) = L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_nL(\bar{v}_n) = a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_n\bar{w}_n.$$

Jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ on kanta ja siten vapaa, joten tästä yhtälöstä seuraa, että

$$a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0.$$

Siis $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_n = \bar{0}$. Näin on osoitettu, että ytimessä ei ole muita vektoreita kuin nollavektori, eli $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Siis $L$ on injektio.

Osoitetaan sitten surjektiivisuus. Oletuksen mukaan $\dim(V) = \dim(W)$. Koska lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ on injektio, se on lauseen 22.4 mukaan myös surjektio. Siis $L$ on bijektiivinen lineaarikuvaus eli isomorfismi. Näin ollen $V \cong W$. □

## 22.1 Lineaarikuvauksen matriisi

Tässä luvussa osoitamme, että jokainen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^m$ avaruudelle $\mathbb{R}^n$ on jonkin matriisin määräämä lineaarikuvaus. Tutkitaan kuitenkin sitä ennen, miten matriisien määräämät lineaarikuvaukset käyttäytyvät.

**Esimerkki 22.6.** Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorin $(x_1, x_2, x_3)$ kuva tässä kuvauksessa on

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 - 1x_2 - 3x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ -1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0x_3 \\ -3x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vektorin $(x_1, x_2, x_3)$ kuva kuvauksessa $L_A$ on siis matriisin $A$ sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit.

Nähdään, että kantavektorin $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ kuva on

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Samalla tavalla vektorin $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ kuvaksi saadaan $(2, -1)$ ja vektorin $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ kuvaksi $(0, -3)$. Luonnollisen kannan vektorien kuvat ovat siis matriisin $A$ sarakkeet.

Lauseessa 19.8 osoitettiin, että matriisista saadaan aina lineaarikuvaus. Nyt osoitamme, että jokainen lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on matriisin määräämä. Lineaarikuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $m \times n$-matriisit siis vastaavat toisiaan.

**Lause 22.7.** *Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, jolla $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.*

*Todistus.* Aloitetaan tutkimalla, mitä tapahtuu, kun matriisilla kerrotaan vektoria. Samaan tapaan kuin esimerkissä 22.6 nähdään, että

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1a_{11} \\ v_1a_{21} \\ \vdots \\ v_1a_{m1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_2a_{12} \\ v_2a_{22} \\ \vdots \\ v_2a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} v_na_{1n} \\ v_na_{2n} \\ \vdots \\ v_na_{mn} \end{bmatrix} \\
&= v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tulo on siis matriisin sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit.

Muodostetaan etsitty matriisi $A$ seuraavasti: Katsotaan, miten avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollisen kannan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ vektorit kuvautuvat lineaarikuvauksessa $T$ eli määritetään $T(\bar{e}_1)$, $T(\bar{e}_2), \ldots, T(\bar{e}_n)$. Asetetaan vektorit $T(\bar{e}_1)$, $T(\bar{e}_2), \ldots, T(\bar{e}_n)$ matriisin $A$ sarakkeiksi tässä järjestyksessä. Voidaan merkitä lyhyesti

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \ldots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että matriisin jokaisessa sarakkeessa on $m$ alkiota ja sarakkeita on $n$ kappaletta, joten $A$ todella on $m \times n$-matriisi.

Osoitetaan, että matriisin $A$ määräämä lineaarikuvaus $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sama kuvaus kuin $T$. Koska kantavektorien kuvavektorit määräävät lineaarikuvauksen (lause 22.1), riittää osoittaa, että kantavektorit $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ kuvautuvat samalla tavalla kuvauksissa $L_A$ ja $T$.

Määritetään luonnollisen kannan vektorien kuvat samaan tapaan kuin esimerkissä 22.6. Edellä osoitettiin, että vektorin kuva lineaarikuvauksessa $L_A$ on matriisin $A$ sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit. Tästä seuraa, että luonnollisen kannan vektorien $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ kuvavektorit ovat matriisin $A$ sarakkeet. Esimerkiksi

$$L_A(\bar{e}_1) = A\bar{e}_1 = 1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + 0 \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Matriisin $A$ sarakkeet taas valittiin niin, että ne ovat kantavektorien kuvavektorit kuvauksessa $T$. Siten $L_A(\bar{e}_i) = T(\bar{e}_i)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lineaarikuvaukset $L_A$ ja $T$ ovat siten lauseen 22.1 nojalla sama kuvaus, eli $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

Osoitetaan vielä, että ehdon toteuttavia matriiseja ei ole enempää kuin yksi. Oletetaan, että sekä matriisin $A$ että matriisin $B$ määräämä kuvaus on $T$ eli $L_A = T$ ja $L_B = T$. Edellä nähtiin, että matriisin määräämässä kuvauksessa luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit ovat matriisin sarakkeet. Koska kuvaukset $L_A$ ja $L_B$ ovat samat, on luonnollisen kannan vektoreilla näissä kuvauksissa samat kuvavektorit. Siten matriisien $A$ ja $B$ sarakkeet ovat samat, eli kyseessä on sama matriisi. Näin ollen on olemassa vain yksi matriisi, jonka määrämä lineaarikuvaus on $T$. □

**Määritelmä 22.8.** Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Edellisessä lauseessa määriteltyä matriisia

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \ldots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

kutsutaan lineaarikuvauksen $T$ *(standardi)matriisiksi*.

Lauseen perusteella tiedetään, että jos $A$ on lineaarikuvauksen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ standardimatriisi, niin $T(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

**Esimerkki 22.9.** Määritetään lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (7x_2,\ x_1 - 3x_2,\ -15x_1 + x_2)$$

matriisi lauseen 22.7 avulla. Tätä varten tarvitaan luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit $L(1,0) = (0, 1, -15)$ ja $L(0,1) = (7, -3, 1)$. Nyt kuvauksen $L$ matriisi saadaan asettamalla nämä kuvavektorit matriisin sarakkeiksi. Siten matriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi voi vielä halutessaan tarkistaa, että matriisilla kertominen tosiaankin tuottaa lineaarikuvauksen arvot. Oletetaan, että $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \\ -15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ -15x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

ja nähdään, että tuloksena on vektorin $(x_1, x_2)$ kuva kuten pitikin.

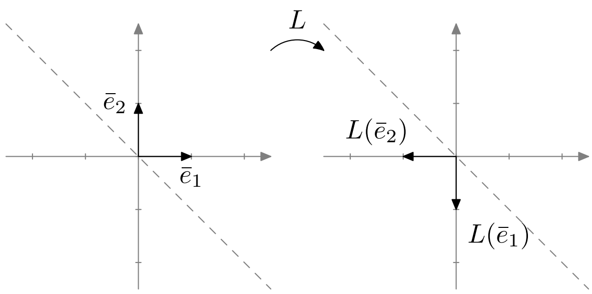
Vaihtoehtoisesti kuvauksen matriisin voi etsiä samalla tavalla kuin esimerkissä 19.10.

**Esimerkki 22.10.** Esimerkissä 19.9 näytettiin, miten joitakin lineaarikuvauksia voidaan ajatella venytyksinä, peilauksina tai kiertoina. Nyt kun tiedetään, kuinka lineaarikuvauksen matriisi muodostetaan, on geometrisen tulkinnan avulla helppo johtaa tällaisen lineaarikuvauksen matriisi.

Tutkitaan vaikkapa, millainen matriisi on lineaarikuvauksella $L$, joka peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}\big((-1,1)\big)$ suhteen. (Jos ollaan tarkkoja, pitäisi ensin osoittaa, että kyseinen kuvaus todellakin on lineaarikuvaus. Se jätetään tällä kertaa väliin.) Matriisin sarakkeiksi tulevat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit. Nähdään, että kantavektori $(1,0)$ kuvautuu vektorille $(0,-1)$ ja kantavektori $(0,1)$ kuvautuu vektorille $(-1,0)$. Nämä vektorit ovat kuvauksen $L$ matriisin $B$ sarakkeet:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

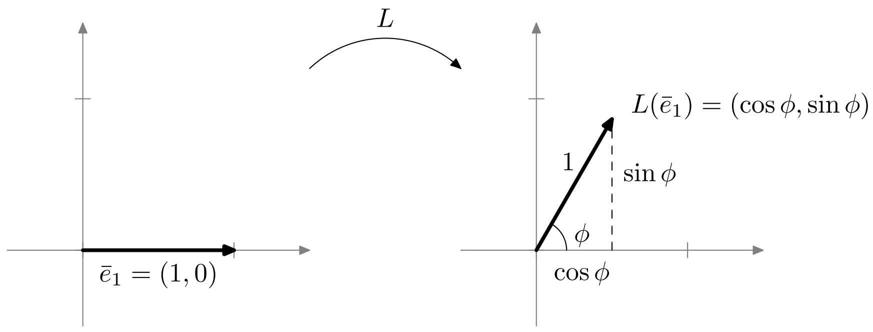
Nyt siis $L(\bar{v}) = B\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$.



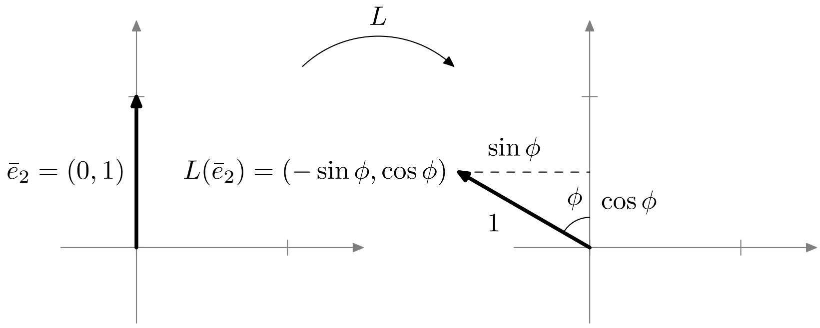

Kuva 22.67: Kantavektorien $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ kuvautuminen lineaarikuvauksessa $L$.

**Esimerkki 22.11.** Tarkastellaan lineaarikuvausta, joka kiertää tason vektoreita $\phi$ astetta vastapäivään. (Jätämme jälleen todistamatta, että kuvaus on todellakin lineaarikuvaus.) Lineaarikuvauksen matriisia varten tarvitsemme luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit. Kuvista 22.68 ja 22.69 näkyy, että vektorin $(1,0)$ kuvavektori on $(\cos\phi, \sin\phi)$ ja vektorin $(0,1)$ kuvavektori on $(-\sin\phi, \cos\phi)$. Siten kiertokuvauksen matriisi on

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$




Kuva 22.68: Kantavektorin $\bar{e}_1$ kuvautuminen kiertokuvauksessa.




Kuva 22.69: Kantavektorin $\bar{e}_2$ kuvautuminen kiertokuvauksessa.

## 22.2 Lineaarikuvauksen matriisit eri kantojen suhteen

Edellä määriteltiin lineaarikuvauksen standardimatriisi. Määritelmä rajoittuu kuitenkin vain tapauksiin, joissa lähtö- ja maaliavaruudet ovat muotoa $\mathbb{R}^n$. Nyt annamme yleisemmän määritelmän lineaarikuvauksen matriisille. Se antaa mahdollisuuden määritelllä minkä tahansa lineaarikuvauksen matriisin kunhan vain lähtö- ja maaliavaruudet ovat äärellisulotteisia.

Lisäksi standardimatriisi on rajoittunut siinä suhteessa, että se käyttää luonnollista kantaa. Standardimatriisin sarakkeina ovat luonnollisen kannan kuvavektorit. Tulemme huomaamaan, että monesti lineaarikuvausten matriisit muuttuvat yksinkertaisemmiksi, kun käyttöön otetaan jokin muu kuin luonnollinen kanta.

Tässä luvussa kaikki vektoriavaruudet ovat äärellisulotteisia.

**Määritelmä 22.12.** Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on avaruuden $V$ kanta ja $\mathcal{T} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$ on avaruuden $U$ kanta. Lineaarikuvauksen $L$ matriisi kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen on

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = [[L(\bar{v}_1)]_{\mathcal{T}} \; [L(\bar{v}_2)]_{\mathcal{T}} \; \cdots \; [L(\bar{v}_n)]_{\mathcal{T}}].$$

Lineaarikuvauksen matriisin sarakkeina ovat siis lähtöavaruuden kannan vektorien kuvavektorit maaliavaruuden kannan suhteen kirjoitettuina.

**Esimerkki 22.13.** Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, jolla

$$L(a_0 + a_1 x) = (a_0 - a_1) + (a_0 + a_1)x^2.$$

Esimerkin 18.3 mukaan jono $\mathcal{S} = (1, x)$ on polynomiavaruuden $\mathcal{P}_1$ kanta ja jono $\mathcal{T} = (1, x, x^2)$ on polynomiavaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta. Määritetään lineaarikuvauksen $L$ matriisi näiden kantojen suhteen.

Lähtöavaruuden kannan vektorien kuvavektoreiksi saadaan $L(1) = 1 + x^2$ ja $L(x) = -1 + x^2$. Niiden koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen ovat $[L(1)]_{\mathcal{T}} = (1, 0, 1)$ ja $[L(x)]_{\mathcal{T}} = (-1, 0, 1)$. Lineaarikuvauksen $L$ matriisi kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen saadaan laittamalla nämä matriisin sarakkeiksi:

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Esimerkki 22.14.** Tutkitaan kuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$$

erästä matriisia. Valitaan lähtöavaruudelle kanta $\mathcal{S} = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ ja maaliavaruudelle kanta $\mathcal{T} = ((1,1), (1,-1))$. Määritetään kuvauksen $L$ matriisi kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen.

Aloitetaan määrittämällä kannan $\mathcal{S}$ vektorien kuvavektorit: $L(1,0,0) = (1,1)$, $L(1,1,0) = (-2,2)$ ja $L(1,1,1) = (0,0)$. Kirjoitetaan sitten näiden kuvavektoreiden koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen. Koska

$$\begin{aligned} L(1,0,0) &= (1,1) = 1(1,1) + 0(1,-1) \\ L(1,1,0) &= (-2,2) = 0(1,1) - 2(1,-1) \\ L(1,1,1) &= (0,0) = 0(1,1) + 0(1,-1), \end{aligned}$$

saadaan koordinaattivektoreiksi $[L(1,0,0)]_{\mathcal{T}} = (1,0)$, $[L(1,1,0)]_{\mathcal{T}} = (0,-2)$ ja $[L(1,1,1)]_{\mathcal{T}} = (0,0)$. Kun koordinaattivektorit asetetaan matriisin sarakkeiksi, saadaan aikaan etsitty matriisi. Se on

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kuvauksen $L$ matriisi kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen on paljon yksinkertaisemman näköinen kuin standardimatriisi. Tämän vuoksi kannanvaihto onkin monesti hyödyllistä. Tähän palataan myöhemmin.

**Esimerkki 22.15.** Lineaarikuvauksen standardimatriisi on erikoistapaus lineaarikuvauksen matriisista. Standardimatriisissa sarakkeina ovat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit luonnollisen kannan suhteen kirjoitettuina. Toisin sanoen kuvauksen $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ standardimatriisi on sama matriisi kuin $[L]_{\mathcal{E}_m,\mathcal{E}_n}$, missä $\mathcal{E}_n$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta ja $\mathcal{E}_m$ on avaruuden $\mathbb{R}^m$ luonnollinen kanta.

Usein puhutaan lineaarikuvauksen matriisista tarkentamatta, minkä kantojen suhteen kirjoitettua matriisia tarkoitetaan. Tällöin tarkoitetaan standardimatriisia.

Aivan kuten standardimatriisinkin tapauksessa, lineaarikuvauksen arvot saadaan kertomalla vektoreita matriisilla $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$. Nyt vain matriisilla kerrotaan kannan $\mathcal{S}$ suhteen kirjoitettuja koordinaattivektoreita ja tuloksena on kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitettuja koordinaattivektoreita.

**Lause 22.16.** *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Olkoon $\mathcal{S}$ avaruuden $V$ kanta ja $\mathcal{T}$ avaruuden $U$ kanta. Lineaarikuvauksen $L$ matriisille kantojen $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ suhteen pätee*

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}[\bar{x}]_{\mathcal{S}} = [L(\bar{x})]_{\mathcal{T}}$$

*kaikilla $\bar{x} \in V$.*

*Matriisi $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ on ainoa matriisi $A$, jolle pätee $A[\bar{x}]_{\mathcal{S}} = [L(\bar{x})]_{\mathcal{T}}$ kaikilla $\bar{x} \in V$.*

*Todistus.* Merkitään $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ ja oletetaan, että $\bar{x} \in V$. Olkoon vektorin $\bar{x}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen

$$[\bar{x}]_{\mathcal{S}} = (c_1, \ldots, c_n).$$

Toisin sanoen $\bar{x} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_n\bar{v}_n$. Nyt lausetta 18.22 ja kuvauksen $L$ lineaarisuutta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}[\bar{x}]_{\mathcal{S}} &= \begin{bmatrix}[L(v_1)]_{\mathcal{T}} & [L(v_2)]_{\mathcal{T}} & \cdots & [L(v_n)]_{\mathcal{T}}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= c_1[L(v_1)]_{\mathcal{T}} + \cdots + c_n[L(\bar{v}_n)]_{\mathcal{T}} \\
&= [c_1L(\bar{v}_1) + \cdots + c_nL(\bar{v}_n)]_{\mathcal{T}} \\
&= [L(c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_n\bar{v}_n)]_{\mathcal{T}} \\
&= [L(\bar{x})]_{\mathcal{T}}.
\end{aligned}$$

Osoitetaan sitten väitteen toinen osa. Oletetaan, että $A$ on matriisi, jolle pätee $A[\bar{x}]_{\mathcal{S}} = [L(\bar{x})]_{\mathcal{T}}$ kaikilla $\bar{x} \in V$. Tämä pätee erityisesti kaikilla kannan $\mathcal{S}$ vektoreilla. Jos $\bar{v}_i$ on kannan $\mathcal{S}$ vektori, sen koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, missä luku 1 on kohdassa $i$. Toisin sanoen $[\bar{v}_i]_{\mathcal{S}} = \bar{e}_i$.

Oletuksen nojalla $A\bar{e}_i = A[\bar{v}_i]_{\mathcal{S}} = [L(\bar{v}_i)]_{\mathcal{T}}$. Toisaalta tiedetään, että $A\bar{e}_i$ on $i$:s sarake matriisissa $A$. Näin ollen matriisin $A$ sarakkeet ovat kannan $\mathcal{S}$ kuvavektorien koordinaattivektorit kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitettuina. Siten $A = [L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$. □

**Esimerkki 22.17.** Esimerkissä 22.13 tarkasteltiin lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, jolla

$$L(a_0 + a_1x) = (a_0 - a_1) + (a_0 + a_1)x^2.$$

Sen matriisiksi kantojen $\mathcal{S} = (1, x)$ ja $\mathcal{T} = (1, x, x^2)$ suhteen saatiin

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkiksi polynomin $p = 5 - 7x$ kuvavektori voidaan nyt selvitää matriisin $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ avulla. Kertomalla matriisilla $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ koordinaattivektoria $[p]_{\mathcal{S}} = (5, -7)$ saadaan

$$[L(p)]_{\mathcal{T}} = [L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}[p]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Siis $L(p) = 12 + 0x - 2x^2 = 12 - 2x^2$.

**Esimerkki 22.18.** Palataan esimerkistä 22.14 tutun lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$$

pariin. Sen matriisiksi kantojen $\mathcal{S} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ ja $\mathcal{T} = ((1, 1), (1, -1))$ suhteen saatiin

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tutkitaan, mitä edellinen lause sanoo vektorin $\bar{x} = (1, 2, 3)$ kuvavektorista tässä lineaarikuvauksessa. Kuvavektorin voi määrittää matriisin $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ avulla kunhan vain käyttää kantoja $S$ ja $\mathcal{T}$. Vektorin $\bar{x}$ koordinaattivektori kannan $S$ suhteen on $[\bar{x}]_{\mathcal{S}} = (-1, -1, 3)$, sillä $\bar{x} = -(1, 0, 0) - (1, 1, 0) + 3(1, 1, 1)$. Kun kerrotaan koordinaattivektoria matriisilla $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$, saadaan

$$[L(\bar{x})]_{\mathcal{T}} = [L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}[\bar{x}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Kertolaskun tulos on siis vektorin $\bar{x}$ kuvavektori kannan $\mathcal{T}$ suhteen kirjoitettuna. Toisin sanoen $[L(\bar{x})]_{\mathcal{T}} = (-1, 2)$.

Tarkistetaan, menivätkö laskut oikein. Koska $[L(\bar{x})]_{\mathcal{T}} = (-1, 2)$, tiedetään, että

$$L(\bar{x}) = -(1, 1) + 2(1, -1) = (1, -3).$$

Toisaalta vektorin $\bar{x} = (1, 2, 3)$ kuvavektorin voi määrittää kuvauksen määritelmän perusteella:

$$L(\bar{x}) = (1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3,\ 1 + 2 - 2 \cdot 3) = (1, -3).$$

Molemmissa tapauksissa saadaan sama vastaus aivan niin kuin pitääkin.

Kannanvaihtomatriisien avulla voidaan muuttaa lineaarikuvauksen matriisiesitys kannasta toiseen.

**Lause 22.19.** *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Olkoot $\mathcal{S}_1$ ja $\mathcal{S}_2$ avaruuden $V$ kantoja ja $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ avaruuden $U$ kantoja. Tällöin*

$$[L]_{\mathcal{T}_2,\mathcal{S}_2} = P_{\mathcal{T}_2 \leftarrow \mathcal{T}_1}[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}P_{\mathcal{S}_1 \leftarrow \mathcal{S}_2}.$$

Lauseen idea voidaan selittää seuraavalla tavalla: Oletetaan, että tiedetään matriisi $[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}$. Tälle matriisille syötetään kannan $\mathcal{S}_1$ suhteen kirjoitettuja koordinaattivektoreita ja se tuottaa kannan $\mathcal{T}_1$ suhteen kirjoitettuja koordinaattivektoreita. Halutaan tietää, miltä näyttää matriisi $[L]_{\mathcal{T}_2,\mathcal{S}_2}$, eli miten kuvaus $L$ toimii kantojen $\mathcal{S}_2$ ja $\mathcal{T}_2$ suhteen. Ensin siirrytään kannasta $\mathcal{S}_2$ kantaan $\mathcal{S}_1$ kannanvaihtomatriisilla $P_{\mathcal{S}_1\leftarrow\mathcal{S}_2}$. Nyt ollaan kannassa $\mathcal{S}_1$ ja voidaan käyttää matriisia $[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}$. Sen jälkeen siirrytään matriisilla $P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}$ kantaan $\mathcal{T}_2$, joten tuloksena on kannan $\mathcal{T}_2$ suhteen kirjoitettuja koordinaattivektoreita.

Tilannetta on havainnollistettu seuraavassa diagrammissa. Siinä $n$ on avaruuden $V$ dimensio ja $m$ on avaruuden $U$ dimensio.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{[L]_{\mathcal{T}_2,\mathcal{S}_2}}"] \arrow[d, "P_{\mathcal{S}_1\leftarrow\mathcal{S}_2}"'] & \mathbb{R}^m \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}"']
\end{tikzcd}$$

*Todistus.* Osoitetaan, että tulomatriisilla $P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}P_{\mathcal{S}_1\leftarrow\mathcal{S}_2}$ kertominen vastaa kuvauksella $L$ kuvaamista, kun vektorit on kirjoitettu kantojen $\mathcal{S}_2$ ja $\mathcal{T}_2$ suhteen.

Oletetaan, että $\bar{x} \in V$. Nyt

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}P_{\mathcal{S}_1\leftarrow\mathcal{S}_2}[\bar{x}]_{\mathcal{S}_2} &= P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}[\bar{x}]_{\mathcal{S}_1} = P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}[L(\bar{x})]_{T_1} = [L(\bar{x})]_{T_2} \\
&= [L]_{\mathcal{T}_2,\mathcal{S}_2}[\bar{x}]_{\mathcal{S}_2}.
\end{aligned}$$

Koska matriisi $[L]_{\mathcal{T}_2,\mathcal{S}_2}$ on lauseen 22.16 perusteella ainoa matriisi, jolla kertominen muuttaa vektorin $[\bar{x}]_{\mathcal{S}_2}$ vektoriksi $[L(\bar{x})]_{\mathcal{T}_2}$, pätee

$$[L]_{\mathcal{T}_2,\mathcal{S}_2} = P_{\mathcal{T}_2\leftarrow\mathcal{T}_1}[L]_{\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1}P_{\mathcal{S}_1\leftarrow\mathcal{S}_2}.$$ □

**Esimerkki 22.20.** Tutkitaan jälleen kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3).$$

Sen matriisi luonnollisen kannan suhteen (eli standardimatriisi) on

$$[L]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 22.14 saatiin kuvauksen matriisiksi kantojen $\mathcal{S} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ ja $\mathcal{T} = ((1,1),(1,-1))$ suhteen

$$[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Edellisen lauseen nojalla matriisista $[L]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3}$ saadaan matriisi $[L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ kannanvaihtomatriiseilla kertomalla. Määritetään kannanvaihtomatriisit $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{E}_2}$ ja $P_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{S}}$. Aloitetaan matrisiista $P_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{S}}$. Sen sarakkeina ovat kannan $\mathcal{S}$ vektorit luonnollisen kannan $\mathcal{E}_3$ suhteen kirjoitettuina, joten

$$P_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{E}_2}$ on matriisin $P_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{T}}$ käänteismatriisi. Koska

$$P_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

saadaan

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{E}_2} = (P_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{E}_2}[L]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3}P_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{S}} &= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = [L]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Kuvauksen yhdestä matriisista saadaan siis toinen kannanvaihtomatriiseilla kertomalla.

Jos lineaarikuvauksen lähtö- ja maaliavaruus ovat samat ja niille valitaan vielä sama kantakin, muuttuu lause 22.19 yksinkertaisempaan muotoon.

**Korollaari 22.21.** *Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus. Olkoot $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{R}$ avaruuden $V$ kantoja. Tällöin*

$$[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1}[L]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}P_{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{S}}.$$

*Todistus.* Korollaari seuraa lauseesta 22.19 ja siitä, että $(P_{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}$. □

Edellisen lauseen tilannetta on kuvattu seuraavassa diagrammissa. Siinä $n$ on avaruuden $V$ dimensio.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "{[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}}"] \arrow[d, "P_{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{S}}"'] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "{[L]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}=(P_{\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

**Esimerkki 22.22.** Toisinaan kannan vaihtaminen auttaa kuvauksen matriisin määrittämisessä. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka peilaa tason vektorin suoran $\operatorname{span}((-1,2))$ suhteen. Määritetään kuvauksen $L$ standardimatriisi.

Standardimatriisia ei ole aivan helppo muodostaa, vaikka kuvaus on geometrisesti yksinkertainen. Tehtävä helpottuu huomattavasti, jos luonnollisen kannan sijaan valitaankin kantavektorit $\bar{v}_1 = (-1,2)$ ja $\bar{v}_2 = (2,1)$. Ensimmäinen niistä on tutkittavan suoran suuntainen ja toinen on suoraa vastaan kohtisuorassa. Kyseessä on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, sillä vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia (ne eivät ole yhdensuuntaisia) ja vektoreita on kaksi.

Määritetään $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ eli kuvauksen $L$ matriisi kannan $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ suhteen. Aloitetaan määrittämällä kannan alkioiden kuvavektorit (ks. kuva 22.70). Ensinnäkin tiedetään, että

$$L(\bar{v}_1) = L(-1,2) = (-1,2) = \bar{v}_1,$$

sillä vektori on suoran suuntainen. Toiseksi

$$L(\bar{v}_2) = L(2,1) = (-2,-1) = -\bar{v}_2,$$

sillä vektori on suoraa vastaan kohtisuorassa. Kirjoitetaan vielä kuvavektorien koordinaattivektorit kannan $S$ suhteen: $[L(\bar{v}_1)]_{\mathcal{S}} = (1,0)$ ja $[L(\bar{v}_2)]_{\mathcal{S}} = (0,-1)$. Näin ollen kuvauksen matriisi on

$$[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Muutetaan se lopuksi standardimatriisiksi kannanvaihdolla.

Kannavaihtomatriisina toimii

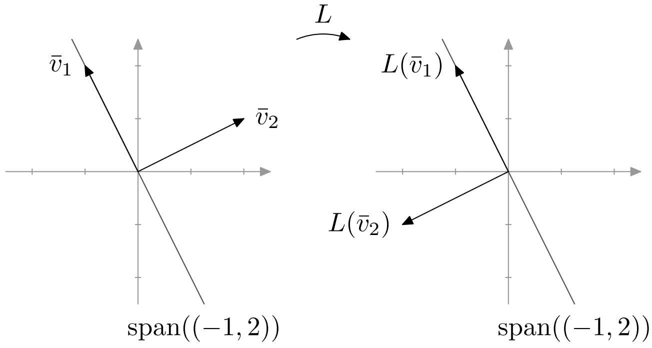
$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

missä $\mathcal{E}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta. Nyt standardimatriisiksi saadaan

$$\begin{aligned}[L]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}}[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}}[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Siten kuvauksen standardimatriisi on

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$




Kuva 22.70: Kantavektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kuvautuminen lineaarikuvauksessa $L$.

# 23 Lineaarikuvauksien ominaisarvot

## 23.1 Ominaisarvon määritelmä

Luvussa 12 käsittelimme matriisien ominaisarvoja. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on neliömatriisin $A$ ominaisarvo, jos on olemassa sellainen nollasta poikkeava vektori $\bar{v}$, että

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Ominaisvektorin tapauksessa matriisilla $A$ kertominen vastaa luvulla $\lambda$ kertomista. Vastaavalla tavalla voidaan määritellä lineaarikuvauksen ominaisarvo.

**Määritelmä 23.1.** Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on kuvauksen $L$ *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in V$, että

$$\bar{v} \neq \bar{0} \quad \text{ja} \quad L(\bar{v}) = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitut ehdot kutsutaan ominaisarvoon $\lambda$ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Lineaarikuvauksen $L$ ominaisvektori on siis vektori, jolle kuvauksella $L$ kuvaaminen vastaa reaaliluvulla $\lambda$ kertomista.

*Huom. 1.* Edellinen määritelmä on sekä ominaisarvon että ominaisvektorin määritelmä. Ominaisarvoa ei voida määritellä ilman ominaisvektoreita eikä ominaisvektoreista voida puhua mainitsematta, mihin ominaisarvoon ne liittyvät.

*Huom. 2.* Nollavektorin ei haluta olevan ominaisvektori, sillä jos niin olisi, kaikki reaaliluvut olisivat kaikkien lineaarikuvauksien ominaisarvoja. Jokaiselle kuvaukselle $L\colon V \to V$ nimittäin pätee $L(\bar{0}) = \bar{0} = \lambda\bar{0}$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Esimerkki 23.2.** Lineaarikuvauksella

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$$

on ominaisarvo 4, sillä

$$L(1,1) = (4,4) = 4(1,1).$$

Eräs ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori on siis $(1,1)$. Myös vaikkapa vektori $(2,2)$ on ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori, sillä $L(2,2) = (8,8) = 4(2,2)$.

Kuvauksella $L$ on toinenkin ominaisarvo. Huomataan nimittäin, että

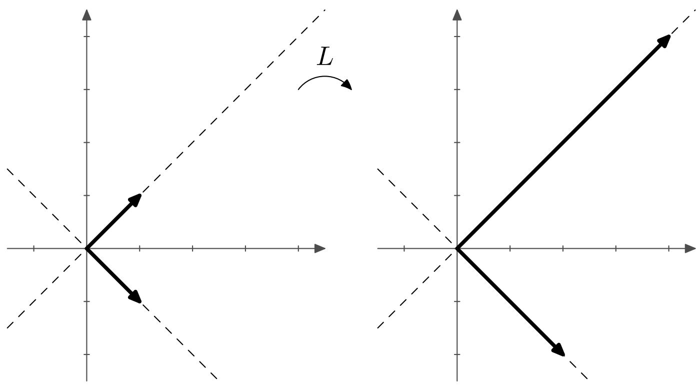
$$L(1,-1) = (2,-2) = 2(1,-1).$$

Näin ollen myös luku 2 on ominaisarvo ja eräs sitä vastaava ominaisvektori on $(1,-1)$.

Lineaarikuvauksen ominaisarvoilla ja ominaisvektoreilla on geometrinen tulkinta.

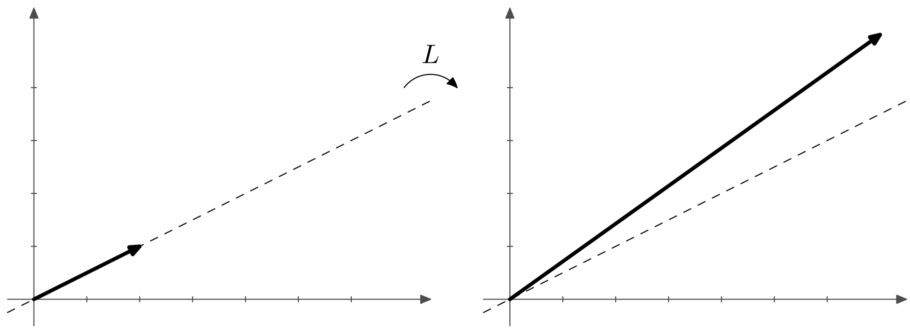
**Esimerkki 23.3.** Jatketaan lineaarikuvauksen $L(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$ tutkimista. Ominaisvektorin $(1,1)$ kuvavektori on $(4,4)$ ja ominaisvektorin $(2,2)$ kuvavektori on $(8,8)$.

Kuvaus siis venyttää ominaisarvoa 4 vastaavien ominaisvektoreiden pituuden nelinkertaiseksi (ks. kuva 23.71). Ominaisarvoa 2 vastaava ominaisvektorin $(1, -1)$ pituus puolestaan kaksinkertaistuu. Oleellista on, että ominaisvektorin kuvavektori on aina suoralla, jonka ominaisvektori virittää.




Kuva 23.71: Vektorit $(1, 1)$ ja $(1, -1)$ ovat lineaarikuvauksen $L$ ominaisvektoreita.

Jos sen sijaan tutkitaan vektoria $(2, 1)$ nähdään, että sen kuvavektori on $(7, 5)$. Vektori $(2, 1)$ ei ole ominaisvektori, koska sen kuvavektori ei ole vektorin $(2, 1)$ virittämällä suoralla.




Kuva 23.72: Vektori $(2, 1)$ ei ole lineaarikuvauksen $L$ ominaisvektori.

Lineaarikuvaukset ja matriisit liittyvät läheisesti toisiinsa. Lineaarikuvauksen ominaisarvot voikin usein määrittää kuvauksen matriisin avulla.

**Esimerkki 23.4.** Tutkitaan kuvausta $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jonka määrää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nyt siis $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$.

Etsitään kuvauksen $L_A$ ominaisarvot. Tutkittavana on yhtälö $L_A(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Tämä yhtälö saadaan muotoon $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. Päädytään siis määrittämään matriisin $A$ ominaisarvoja.

Matriisin ominaisarvot löytyvät karakteristisen polynomin avulla (ks. luku 12.2). Matriisin $A$ karakteristinen polynomi on

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda).$$

Karakteristisen polynomin nollakohdat ovat $\lambda = 2$ ja $\lambda = 3$. Siten matriisilla $A$ on kaksi ominaisarvoa, 2 ja 3. Nämä ovat lineaarikuvauksen $L_A$ ominaisarvot.

**Esimerkki 23.5.** Määritetään kuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_3, 3x_1 - 3x_3, x_1 - x_3)$$

ominaisarvot. Selvitetään ensin kuvauksen $L$ matriisi. Matriisin sarakkeina ovat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit, joten se on

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lineaarikuvauksen ominaisarvot ovat samat kuin kuvauksen matriisin ominaisarvot. Matriisin ominaisarvot puolestaan löytyvät karakteristisen polynomin avulla:

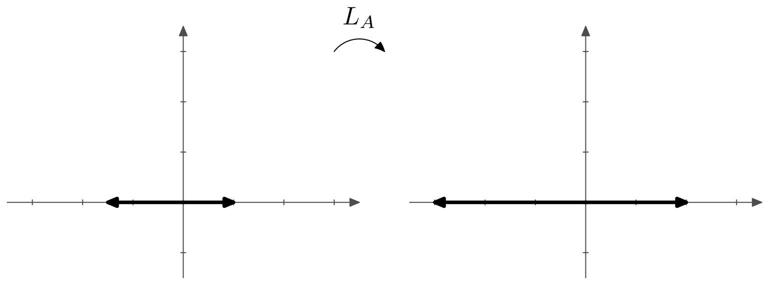
$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2(-\lambda) + \lambda \\ &= (-(-1-\lambda)^2 + 1)\lambda \\ &= (-1 - 2\lambda - \lambda^2 + 1)\lambda \\ &= (-2\lambda - \lambda^2)\lambda \\ &= (-2-\lambda)\lambda^2. \end{aligned}$$

Polynomin nollakohdat ovat $\lambda = -2$ ja $\lambda = 0$. Siten matriisilla $A$ on kaksi ominaisarvoa, $-2$ ja 0. Näin ollen myös lineaarikuvauksen $L_A$ ominaisarvot ovat $-2$ ja 0.

## 23.2 Ominaisarvojen selvittäminen geometrisesti

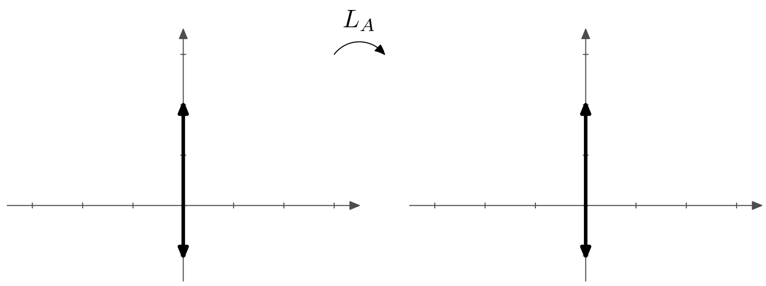
Toisinaan lineaarikuvauksen ominaisarvot ja ominaisvektorit voi päätellä geometrisesti ilman laskuja. Tarkastellaan kolmea esimerkistä 19.9 tuttua kuvausta, jotka venyttävät, peilaavat ja kiertävät vektoreita.

Tutkitaan ensin lineaarikuvausta $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$, joka venyttää vektoreita $x_1$-akselin suunnassa kaksinkertaisiksi. Tällaisessa kuvauksessa vektorin $(1, 0)$ suuntaiset vektorit venyvät kaksinkertaisiksi. Tästä voidaan päätellä, että vektorit $t(1, 0)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat kuvauksen ominaisvektoreita. Vastaava ominaisarvo on 2.



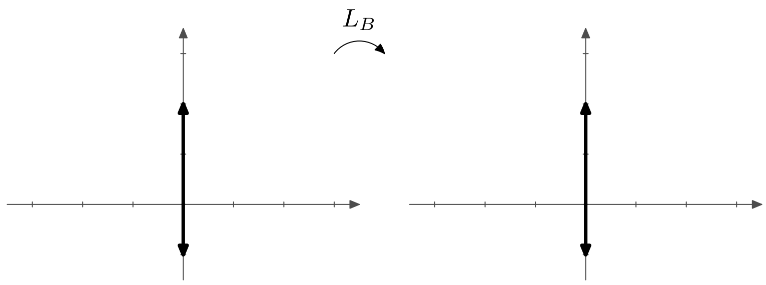

Kuva 23.73: Vaaka-akselin suuntaiset vektorit ovat kuvauksen $L_A$ ominaisvektoreita.

Toisaalta vektorin $(0, 1)$ suuntaisille vektoreille ei tapahdu mitään. Siten myös vektorit $t(0, 1)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat kuvauksen ominaisvektoreita. Niitä vastaava ominaisarvo on 1.



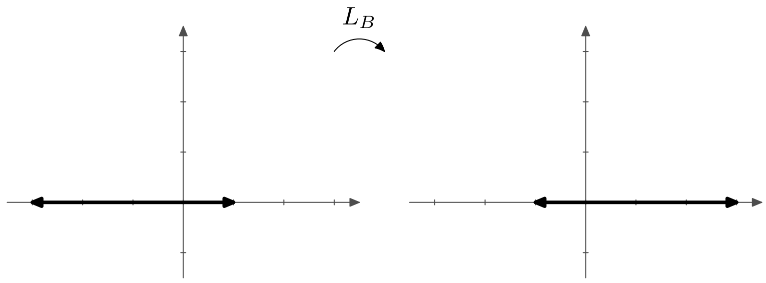

Kuva 23.74: Pystyakselin suuntaiset vektorit ovat kuvauksen $L_A$ ominaisvektoreita.

Tutkitaan sitten lineaarikuvausta $L_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_B(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$, joka peilaa vektorit $x_2$-akselin suhteen. Tällaisessa kuvauksessa vektorin $(0, 1)$ suuntaisille vektoreille ei tapahdu mitään. Näin ollen vektorit $t(0, 1)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat kuvauksen ominaisvektoreita, ja vastaava ominaisarvo on 1.



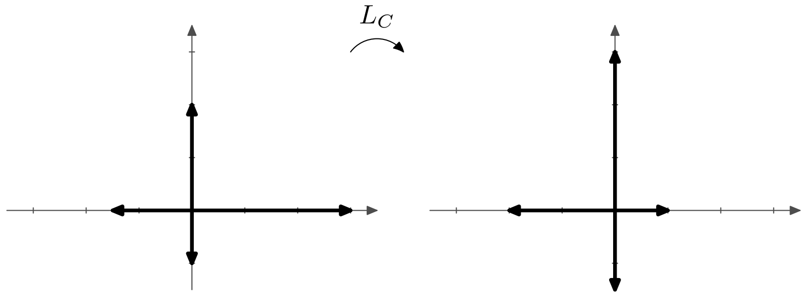

Kuva 23.75: Pystyakselin suuntaiset vektorit ovat kuvauksen $L_B$ ominaisvektoreita.

Vektorin $(1, 0)$ suuntaiset vektorit kuvautuvat vastavektoreikseen. Siis vektorit $t(1, 0)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat ominaisvektoreita. Niitä vastaava ominaisarvo on $-1$.




Kuva 23.76: Vaaka-akselin suuntaiset vektorit ovat kuvauksen $L_B$ ominaisvektoreita.

Tutkitaan lopuksi lineaarikuvausta $L_C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_C(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, joka kiertää vektoreita origon ympäri 90° vastapäivään. Kuvauksessa $L_C$ kaikkien nollasta poikkeavien vektorien suunta muuttuu 90°. Tästä voidaan päätellä, että kuvauksella ei ole ominaisvektoreita eikä ominaisarvoja.




Kuva 23.77: Kuvaus $L_C$ muuttaa vektoreiden suuntaa 90°.

## 23.3 Ominaisavaruudet

Kun kaikki kuvauksen ominaisarvoa vastaavat vektorit (sekä nollavektori) kerätään yhteen, saadaan ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus.

**Määritelmä 23.6.** Oletetaan, että lineaarikuvauksella $L\colon V \to V$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ominaisarvoa $\lambda$ vastaava *ominaisavaruus* on joukko

$$\{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.\}$$

Ominaisarvoa $\lambda$ vastaavalle ominaisavaruudelle käytetään usein merkintää $V_\lambda$.

**Esimerkki 23.7.** Tutkitaan esimerkistä 23.5 tuttua kuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jonka määrää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esimerkissä osoitettiin, että kuvauksen ominaisarvot ovat $-2$ ja 0. Määritetään näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet. Käytännössä tämä tarkoittaa ominaisarvoa vastaavien ominaisvektorien selvittämistä.

Aloitetaan ominaisarvosta $-2$. Sitä vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(A-(-2)I)\bar{v} = \bar{0}$ eli yhtälöstä $(A+2I)\bar{v} = \bar{0}$ (ks. luku 12.2). Tätä yhtälöä vastaava matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1+2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0+2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1+2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Siitä saadaan alkeisrivitoimituksilla redusoitu porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

mistä nähdään, että yhtälön ratkaisut ovat

$$\begin{cases} v_1 = -t \\ v_2 = 3t \\ v_3 = t, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ominaisarvoa $-2$ vastaavat ominaisvektorit ovat siis muotoa $(-t, 3t, t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ominaisavaruuteen otetaan mukaan myös nollavektori, joten ominaisarvoa $-2$ vastaava ominaisavaruus on

$$V_{-2} = \{(-t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 3, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}((-1, 3, 1)).$$

Siis $V_{-2}$ on vektorin $(-1, 3, 1)$ virittämä aliavaruus.

Määritetään sitten ominaisarvoa 0 vastaava ominaisavaruus. Nyt ratkaistavana on yhtälö $(A - 0I)\bar{v} = \bar{0}$ eli yhtälö $A\bar{v} = \bar{0}$. Tätä yhtälöä vastaava matriisi on

$$\left[\begin{array}{rcr|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Siitä saadaan alkeisrivitoimituksilla redusoitu porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

mistä nähdään, että yhtälön ratkaisut ovat

$$\begin{cases} v_1 = s \\ v_2 = t \\ v_3 = s, \quad \text{missä } s,\, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Siten ominaisarvoa 0 vastaava ominaisavaruus on

$$V_0 = \{(s,t,s) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \{s(1,0,1) + t(0,1,0) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}((1,0,1),(0,1,0)).$$

Siis $V_0$ on vektoreiden $(1,0,1)$ ja $(0,1,0)$ virittämä aliavaruus.

Ominaisavaruudet ovat aliavaruuksia aivan kuten niiden nimikin antaa olettaa.

**Lause 23.8.** *Lineaarikuvauksen $L\colon V \to V$ ominaisarvoa $\lambda$ vastaava ominaisavaruus $V_\lambda$ on vektoriavaruuden $V$ aliavaruus.*

*Todistus.* Ensinnäkin $V_\lambda$ on määritelmänsä perusteella joukon $V$ osajoukko. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V_\lambda$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt $L(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ ja $L(\bar{w}) = \lambda\bar{w}$.

a) On osoitettava, että $\bar{v} + \bar{w} \in V_\lambda$. Lineaarikuvauksen määritelmän perusteella

$$L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w}) = \lambda\bar{v} + \lambda\bar{w} = \lambda(\bar{v} + \bar{w}).$$

Siis $\bar{v} + \bar{w} \in V_\lambda$.

b) Lineaarikuvauksen määritelmän mukaan $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v}) = c(\lambda\bar{v}) = \lambda(c\bar{v})$, joten $c\bar{v} \in V_\lambda$.

c) Lineaarikuvaukset kuvaavat aina nollavektorin nollavektoriksi, joten $L(\bar{0}) = \bar{0} = \lambda\bar{0}$. Siis $\bar{0} \in V_\lambda$. □

## 23.4 Lineaarikuvauksen diagonalisointi

Luvussa 12.3 käsiteltiin matriisien diagonalisointia. Nyt ryhdymme diagonalisoimaan lineaarikuvausten matriiseja. Tulemme näkemään, että se on itse asiassa erikoistapaus kannanvaihdosta.

Tutkitaan asiaa esimerkin avulla. Diagonalisoidaan lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 + x_3, 3x_1 - 3x_3, x_1 - x_3)$$

matriisi. Esimerkissä 23.5 todettiin, että kuvauksen matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ja matriisin ominaisarvoiksi saatiin $-2$ ja $0$. Esimerkin 23.7 perusteella ominnaisarvoa $-2$ vastaava ominaisavaruus on $V_{-2} = \operatorname{span}((-1,3,1))$ ja ominaisarvoa 0 vastaava ominaisavaruus on $V_0 = \operatorname{span}((1,0,1),(0,1,0))$. Matriisi $A$ on diagonalisoituva, jos on mahdollista löytää kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria (lause 12.12).

Voidaan osoittaa, että ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (1,0,1)$, $\bar{v}_2 = (0,1,0)$ ja $\bar{v}_3 = (-1,3,1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. (Tämä jätetään lukijalle.) Siten matriisi on diagonalisoituva. Nyt siis

$$P^{-1}AP = D,$$

missä

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matriisin $D$ lävistäjällä ovat ominaisarvot ja matriisin $P$ sarakkeina niitä vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$.

Diagonalisoinnissa käytettävä matriisi $P$ on itse asiassa kannanvaihtomatriisi ominaisvektorien muodostamasta kannasta $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ luonnolliseen kantaan $\mathcal{E}$. Ensinnäkin ominaisvektorit muodostavat kannan lauseen 18.13 perusteella, sillä ne ovat lineaarisesti riippumattomia ja niitä on kolme. Matriisi $P$ puolestaan on kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{E}$, sillä sen sarakkeet ovat kannan $\mathcal{S}$ vektorit luonnollisen kannan $\mathcal{E}$ suhteen kirjoitettuina.

Matriisi $A$ on lineaarikuvauksen $L$ matriisi luonnollisen kannan suhteen. Korollaarin 22.21 nojalla $D$ on kuvauksen $L$ matriisi kannan $\mathcal{S}$ suhteen. Diagonalisoinnissa siis etsitään uusi ominaisvektoreista muodostuva kanta, jonka suhteen kirjoitettuna lineaarikuvauksen matriisi on diagonaalimatriisi. Tämän kannna suhteen kirjoitettu matriisi on mahdollisimman yksinkertainen, sillä se on lävistäjämatririisi.

# 24 Sisätulo

Ottamalla lähtökohdaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien pistetulon ominaisuudet, voidaan määritellä vektoriavaruuteen $V$ yleisempi sisätulon käsite.

**Määritelmä 24.1.** Vektoriavaruuden $V$ *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden $V$ alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

1) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$
2) $\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$
3) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$
4) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; lisäksi $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Vektoriavaruutta, jossa on määritelty sisätulo, kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*. Huomaa, että ehdoista 1 ja 2 seuraa, että $\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$. Samalla tavalla $\langle \bar{v}, c\bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$.

**Esimerkki 24.2.** Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulo on sisätulo. Tässä tapauksessa $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \bar{v} \cdot \bar{w}$, missä $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$.

**Esimerkki 24.3.** Vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ voidaan määritellä myös muita sisätuloja. Osoitetaan, että kaava $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2v_2 w_2$ määrittää avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulon. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$.

1) Reaalilukujen kertolaskun vaihdannaisuudesta seuraa, että

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2v_2 w_2 = w_1 v_1 + 2w_2 v_2 = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle.$$

   Siis ehto 1 pätee.

2) Ehto 2 saadaan puolestaan reaalilukujen osittelulaista sekä yhteenlaskun liitännäisyydestä ja vaihdannaisuudesta:

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle &= v_1(w_1 + u_1) + 2v_2(w_2 + u_2) \\ &= v_1 w_1 + v_1 u_1 + 2v_2 w_2 + 2v_2 u_2 \\ &= v_1 w_1 + 2v_2 w_2 + v_1 u_1 + 2v_2 u_2 \\ &= \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle. \end{aligned}$$

3) Myös ehto 3 pätee, sillä

$$\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = cv_1 w_1 + 2cv_2 w_2 = c(v_1 w_1 + 2v_2 w_2) = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle.$$

4) Nähdään, että $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = v_1 v_1 + 2v_2 v_2 = v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$. Osoitetaan vielä, että $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä täytyy tehdä kahdessa osassa.

"$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$. Nyt $v_1^2 + 2v_2^2 = 0$. Koska kumpikaan yhtälön vasemman puolen summattavista ei ole negatiivinen, täytyy päteä $v_1^2 = 0$ ja $2v_2^2 = 0$. Tästä seuraa, että $v_1 = 0$ ja $v_2 = 0$. Siis $\bar{v} = \bar{0}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että $\bar{v} = \bar{0}$. Nyt $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = 0^2 + 2 \cdot 0^2 = 0$.

Siten viimeinenkin ehto pätee, ja kyseessä on sisätulo.

**Esimerkki 24.4.** Joukko

$$C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$$

on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään pisteittäin samaan tapaan kuin esimerkissä 15.6. Vektoriavaruudessa $C([0,1])$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esimerkiksi vektoreiden $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ ja $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x$, sisätulo on

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+2)(x^2-3x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^3 - x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 3 = -\frac{37}{12}. \end{aligned}$$

**Lemma 24.5.** *Sisätuloavaruudessa $V$ pätee $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{v} \in V$.*

*Todistus.* Oletetaan, että $V$ on sisätuloavaruus ja $\bar{v} \in V$. Sisätulon määritelmän mukaan

$$\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} + \bar{0} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle.$$

Vähentämällä yhtälön molemmilta puolilta luku $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle$, saadaan $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$. Lisäksi sisätulon määritelmän perusteella $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$. □

## 24.1 Normi ja kohtisuoruus

Sisätuloavaruudessa voidaan määritellä normi samaan tapaan kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulon tapauksessa.

**Määritelmä 24.6.** Olkoon $V$ sisätuloavaruus. Tällöin vektorin $\bar{v} \in V$ *normi* on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$

Sisätulon määritelmän mukaan $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$ kaikilla $\bar{v} \in V$, joten normi on aina määritelty. Sisätuloavaruuden normille pätevät tutut tulokset.

**Lause 24.7.** *Oletetaan, että $V$ on sisätuloavaruus, $\bar{v} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

*a)* $\|\bar{v}\| \geq 0$

*b)* $\|\bar{v}\| = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = 0$

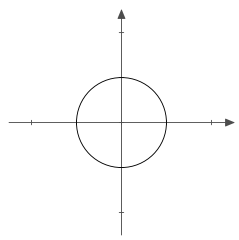
*c)* $\|c\bar{v}\| = |c|\,\|\bar{v}\|$.

*Todistus.* Lauseen todistus on samanlainen kuin pistetulon tapauksessa (lauseet 13.5 ja 13.6). □

**Esimerkki 24.8.** Sisätuloavaruuden *yksikköympyrä* koostuu kaikista vektoreista, joiden pituus on yksi. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ ja pistetulon tapauksessa yksikköympyrä on joukko

$$\begin{aligned}\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{v}\| = 1\} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = 1\} \\ &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{v} \cdot \bar{v} = 1\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Kun vektorit tulkitaan tason pisteiksi, voi yksikköympyrästä piirtää kuvan koordinaatistoon. Sen alkiot muodostavat ympyrän, jonka säde on yksi ja keskipiste $(0, 0)$.

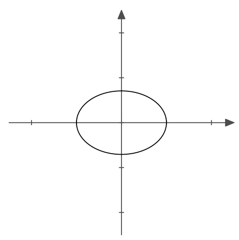


Kuva 24.78: Avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköympyrä, kun sisätulona on pistetulo.

Tutkitaan sitten esimerkissä 24.3 esiteltyä avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätuloa, joka määriteltiin kaavalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2$. Tällöin yksikköympyrä on joukko

$$\begin{aligned}\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{v}\| = 1\} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = 1\} \\ &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 1\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + 2v_2^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Kun tästä joukosta piirtää kuvan, on tuloksena ellipsi.



Kuva 24.79: Kun sisätulo määritellään kaavalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2$, avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköympyrä onkin ellipsi.

Sisätulon avulla voidaan määritellä vektorien kohtisuoruus.

**Määritelmä 24.9.** Olkoon $V$ sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Tällöin vektorit $\bar{v} \in V$ ja $\bar{w} \in V$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0.$$

**Esimerkki 24.10.** Tutkitaan vektoriavaruutta

$$C([-2,2]) = \{f \colon [-2,2] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

missä sisätulo määritellään kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Merkitään $f \colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ ja $g \colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + x$.

Funktiot $f$ ja $g$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan, sillä

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int_{-2}^{2} (x+1)(-x^2+x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (-x^3 + x^2 - x^2 + x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} (-x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \mathop{\Big/}_{-2}^{2} -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 = \left(-\frac{16}{4} + \frac{4}{2}\right) - \left(-\frac{16}{4} + \frac{4}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Koulusta tuttu Pythagoraan lause voidaan yleistää mihin tahansa sisätuloavaruuteen.

**Lause 24.11** (Pythagoraan lause)**.** *Olkoon $V$ sisätuloavaruus. Vektorit $\bar{v} \in V$ ja $\bar{w} \in V$ ovat ortogonaaliset, jos ja vain jos*

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v} + \bar{w}\|^2.$$

*Todistus.* Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

## 24.2 Ortogonaaliset ja ortonormaalit kannat

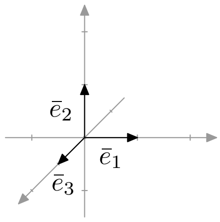
Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta on erityinen ainakin kahdesta syystä. Ensinnäkin kaikki sen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Toiseksi, kaikkien kantavektorien pituus on yksi. Nämä ominaisuudet tekevät luonnollisesta kannasta hyvin käyttökelpoisen.

**Määritelmä 24.12.** Sisätuloavaruuden $V$ jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos sen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eikä mikään niistä ole nollavektori. Toisin sanoen

a) $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$, kun $i \neq j$ ja
b) $\bar{v}_i \neq \bar{0}$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Sisätuloavaruuden kantaa kutsutaan ortogonaaliseksi, jos se on jonona ortogonaalinen.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ on ortogonaalinen. Avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kuitenkin monia muitakin ortogonaalisia kantoja.




Kuva 24.80: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortogonaalinen.

**Esimerkki 24.13.** Avaruuden $\mathbb{R}^3$ jono $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, missä

$$\bar{v}_1 = (-2, 1, 1),\ \bar{v}_2 = (1, 1, 1),\ \bar{v}_3 = (0, 1, -1),$$

on ortogonaalinen tavallisen pistetulon suhteen. Tämä nähdään laskemalla kaikki mahdolliset vektorien väliset pistetulot: $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = -2 + 1 + 1 = 0$, $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = 1 - 1 = 0$ ja $\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = 1 - 1 = 0$.

**Esimerkki 24.14.** Tutkitaan vektoriavaruutta

$$C([-\pi, \pi]) = \{f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

missä sisätulo määritellään kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Merkitään

$$\begin{aligned}
f &\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1, \\
g &\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x, \\
h &\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \cos x.
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että jono $(f, g, h)$ on ortogonaalinen.

On siis näytettävä, että $\langle f, g \rangle = 0$, $\langle f, h \rangle = 0$ ja $\langle g, h \rangle = 0$. Nähdään, että

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \Big/_{-\pi}^{\pi} - \cos x = -\cos \pi + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0.$$

Vastaavat laskut osoittavat, että $\langle f, h \rangle = 0$. Tarkistetaan vielä viimeinen sisätulo:

$$\begin{aligned}
\langle g, h \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin 2x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \Big/_{-\pi}^{\pi} - \cos 2x = \frac{1}{4}(-\cos 2\pi + \cos(-2\pi)) = \frac{1}{4}(-1 + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Siten jono $(f, g, h)$ on ortogonaalinen.

Ortogonaaliset jonot ovat hyödyllisiä muun muassa siitä syystä, että ne ovat aina vapaita.

**Lause 24.15.** *Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sisätuloavaruuden $V$ ortogonaalinen jono. Tällöin $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa.*

*Todistus.* Olkoot $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Oletetaan, että $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nyt

$$\langle \bar{v}_i, c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k \rangle = \langle \bar{v}_i, \bar{0} \rangle.$$

Yhtälön vasen puoli saadaan muotoon

$$c_1\langle \bar{v}_i, \bar{v}_1 \rangle + \cdots + c_k\langle \bar{v}_i, \bar{v}_k \rangle = c_i\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle,$$

sillä jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on ortogonaalinen. Toisaalta $\langle \bar{v}_i, \bar{0} \rangle = 0$ lemman 24.5 nojalla. Siis $c_i\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle = 0$.

Koska ortogonaalisessa jonossa ei määritelmän mukaan ole nollavektoreita, ei $\bar{v}_i$ ole nollavektori. Näin ollen $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle \neq 0$, mistä seuraa, että $c_i = 0$. Siten $c_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$, ja jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. □

**Määritelmä 24.16.** Sisätuloavaruuden jono on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi jokaisen vektorin normi on yksi.

Sisätuloavaruuden kantaa kutsutaan ortonormaaliksi, jos se on jonona ortonormaali. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortonormaali.

Yleensä vektorin koordinaattien määrittäminen annetun kannan suhteen vaatii yhtälöryhmän ratkaisemista. Ortonormaalin kannan tapauksessa vektorin koordinaatit on kuitenkin hyvin helppo määrittää. Osoittautuu, että koordinaatit saadaan laskemalla vektorin sisätulot kantavektoreiden kanssa.

**Esimerkki 24.17.** Tutkitaan avaruutta $\mathbb{R}^3$, jossa sisätulona on tavallinen pistetulo. Vektorin $\bar{w} = (2, 9, -7)$ koordinaantit kannan $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ suhteen ovat 2, 9 ja $-7$, sillä

$$\bar{w} = 2\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3.$$

Huomataan, että tämän kannan tapauksessa koordinaatit ovat vektorin $\bar{w}$ pistetulot kantavektorien kanssa:

$$\begin{aligned}
\bar{w} \cdot \bar{e}_1 &= (2, 9, -7) \cdot (1, 0, 0) = 2, \\
\bar{w} \cdot \bar{e}_2 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 1, 0) = 9, \\
\bar{w} \cdot \bar{e}_3 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 0, 1) = -7.
\end{aligned}$$

Seuraava lause osoittaa, että tämä pätee aina ortonormaaleille kannoille.

**Lause 24.18.** *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ on sisätuloavaruuden $V$ ortonormaali kanta. Olkoon $\bar{v} \in V$. Tällöin*

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \cdots + \langle \bar{v}, \bar{u}_n \rangle \bar{u}_n.$$

*Toisin sanoen vektorin $\bar{v}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan sisätulon avulla.*

*Todistus.* Tutkitaan vektorin $\bar{v} \in V$ koordinaatteja kannan $\mathcal{B}$ suhteen. Olkoot koordinaatit $a_1, \ldots, a_n$ eli $\bar{v} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \cdots + a_n \bar{u}_n$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle &= \langle a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \cdots + a_n \bar{u}_n, \bar{u}_1 \rangle \\
&= a_1 \langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle + a_2 \langle \bar{u}_2, \bar{u}_1 \rangle + \cdots + a_n \langle \bar{u}_n, \bar{u}_1 \rangle \\
&= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_1.
\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että $\langle \bar{v}, \bar{u}_i \rangle = a_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vektorin $\bar{v}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan siis laskemalla vektorin $\bar{v}$ sisätulo kantavektorien kanssa. □

**Esimerkki 24.19.** Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on muitakin ortonormaaleja kantoja kuin luonnollinen kanta. Esimerkiksi jono $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, missä

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

on ortonormaali tavallisen pistetulon suhteen. (Tämä jono on itse asiassa muokattu esimerkin 24.13 ortogonaalisesta jonosta skaalaamalla vektorien pituuksia. Lukijan tehtäväksi jää varmistua siitä, että kaikkien vektorien väliset pistetulot ovat tosiaankin nollia ja jokaisen vektorin normi on yksi.)

Jono $\mathcal{S}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Ensinnäkin se on ortogonaalinen jono ja siten lauseen 24.15 perusteella vapaa. Toiseksi jonossa on kolme vektoria, joten se on lauseen 18.13 nojalla kanta.

Määritetään vektorin $\bar{w} = (2, 9, -7)$ koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen. Jos koordinaatit määritettäisiin vanhaan tuttuun tapaan eli ratkaisemalla yhtälöryhmä, tulisi laskuista hyvin ikäviä. Edellisen lauseen perusteella riittää kuitenkin laskea vektorin $\bar{w}$ pistetulot kantavektorien kanssa:

$$\begin{aligned}
\bar{w} \cdot \bar{v}_1 &= (2, 9, -7) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \\
\bar{w} \cdot \bar{v}_2 &= (2, 9, -7) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{4}{\sqrt{3}}, \\
\bar{w} \cdot \bar{v}_3 &= (2, 9, -7) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = \frac{16}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Siten koordinaatit ovat $-2/\sqrt{6}$, $4/\sqrt{3}$ ja $16/\sqrt{2}$. Tämän voi vielä tarkistaa laskemalla, että

$$\bar{w} = -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{v}_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\bar{v}_2 + \frac{16}{\sqrt{2}}\bar{v}_3.$$

## 24.3 Kohtisuora komplementti

Aliavaruuden kohtisuora komplementti koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan.

**Määritelmä 24.20.** Olkoon $W$ sisätuloavaruuden $V$ aliavaruus. Sen *kohtisuora komplementti* on joukko

$$W^{\perp} = \{\bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\}.$$

Kohtisuoraa koplementtia kutsutaan myös ortogonaaliseksi komplementiksi.

**Esimerkki 24.21.** Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta

$$W = \operatorname{span}\big((2,1)\big) = \{t(2,1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

joka on vektorin $(2,1)$ suuntainen origon kautta kulkeva suora. Tutkitaan tämän aliavaruuden kohtisuoraa komplementtia $W^{\perp}$, kun sisätulona on tavallinen pistetulo.

Esimerkiksi vektori $(-1,2)$ on kohtisuorassa komplementissa $W^{\perp}$, mikä nähdään seuraavasti. Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Nyt $\bar{w} = t(2,1)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Nähdään, että

$$(-1,2) \cdot \bar{w} = (-1,2) \cdot t(2,1) = t((-1,2) \cdot (2,1)) = t(-2+2) = 0.$$

Siten $(-1,2)$ on kohtisuorassa jokaista aliavaruuden $W$ vektoria vastaan eli $(-1,2) \in W^{\perp}$

Kohtisuora komplementti $W^{\perp}$ koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia suoran $W$ vektoreita vastaan. Kuvan perusteella kohtisuora komplementti on siis $W$:tä vastaan kohtisuorassa oleva origon kautta kulkeva suora (ks. kuva 24.81).

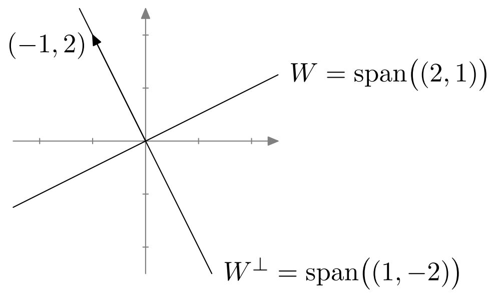
Määritetään aliavaruuden kohtisuora komplementti $W^{\perp}$ täsmällisesti. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
W^{\perp} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (v_1, v_2) \cdot \bar{w} = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (v_1, v_2) \cdot t(2,1) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t(2v_1 + v_2) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Tutkitaan hieman tarkemmin ehtoa ”$t(2v_1 + v_2) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$”, ja osoitetaan, että se on yhtäpitävä ehdon $2v_1 + v_2 = 0$ kanssa: Jos $2v_1 + v_2 = 0$, niin $t(2v_1 + v_2) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Oletetaan sitten, että $t(2v_1 + v_2) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Tällöin $1(2v_1 + v_2) = 0$, joten $2v_1 + v_2 = 0$. Siten ehto ”$t(2v_1 + v_2) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$” pätee, jos ja vain jos $2v_1 + v_2 = 0$. Näin ollen edellinen joukko sievenee muotoon

$$\begin{aligned}
\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2v_1 + v_2 = 0\} &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = -2v_1\} \\
&= \{(v_1, -2v_1) \mid v_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v_1(1,-2) \mid v_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((1,-2)\big).
\end{aligned}$$

Näin ollen $W^{\perp} = \operatorname{span}\big((1,-2)\big)$. Ortogonaalinen komplementti on siis origon kautta kulkeva vektorin $(1,-2)$ suuntainen suora.



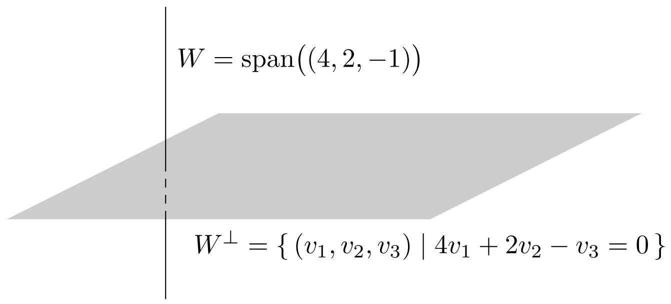

Kuva 24.81: Avaruuden $\mathbb{R}^2$ suoran $W = \operatorname{span}\big((2,1)\big)$ kohtisuora komplementti on suora $\operatorname{span}\big((1,-2)\big)$.

**Esimerkki 24.22.** Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}\big((4,2,-1)\big)$, joka on vektorin $(4,2,-1)$ suuntainen, origon kautta kulkeva suora. Määritetään aliavaruuden kohtisuora komplementti $W^{\perp}$, kun sisätulona on tavallinen pistetulo. Kuvan perusteella vaikuttaisi siltä, että tämän suoran kohtisuora komplementti olisi taso, joka on kohtisuorassa suoraa vastaan (ks. kuva 24.82).

Määritetään kohtisuora komplementti vielä täsmällisesti. Nähdään, että

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\ &= \{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (v_1,v_2,v_3) \cdot t(4,2,-1) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t(4v_1 + 2v_2 - v_3) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4v_1 + 2v_2 - v_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Luvun 13.4 tietojen perusteella huomataan, että kyseessä on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jonka eräs normaali on vektori $(4,2,-1)$. Ortogonaalinen komplementti on siis origon kautta kulkeva taso.




Kuva 24.82: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoran $\operatorname{span}\big((4,2,-1)\big)$ kohtisuora komplementti on taso $\big\{(v_1,v_2,v_3) \mid 4v_1 + 2v_2 - v_3 = 0\big\}$.

Aliavaruuden kohtisuora komplementti on aina aliavaruus.

**Lause 24.23.** *Olkoon $W$ sisätuloavaruuden $V$ aliavaruus. Sen kohtisuora komplementti $W^{\perp}$ on myös avaruuden $V$ aliavaruus.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{u} \in W^{\perp}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt kaikilla $\bar{w} \in W$ pätee $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0$. On osoitettava, että $\bar{v} + \bar{u} \in W^{\perp}$, $c\bar{v} \in W^{\perp}$ ja $\bar{0} \in W^{\perp}$. Toisin sanoen täytyy näyttää, että

$$\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0, \quad \langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \quad \text{ja} \quad \langle \bar{0}, \bar{w} \rangle = 0$$

kaikilla $\bar{w} \in W$.

Oletetaan tätä varten, että $\bar{w} \in W$. Sisätulon määritelmän nojalla

$$\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Samalla tavalla nähdään, että

$$\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = c \cdot 0 = 0.$$

Lisäksi lauseen 24.5 nojalla pätee $\langle \bar{0}, \bar{w} \rangle = 0$.

Siten $\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0$, $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{0}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$, joten $\bar{v} + \bar{u} \in W^{\perp}$, $c\bar{v} \in W^{\perp}$ ja $\bar{0} \in W^{\perp}$. Näin on osoitettu, että $W^{\perp}$ on aliavaruus. □

Jos vektori on kohtisuorassa aliavaruuden virittäjävektoreita vastaan, se on kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan. Pelkkien virittäjävektorien tarkasteleminen siis riittää.

**Lause 24.24.** *Olkoon $W$ on sisätuloavaruuden $V$ aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$ ja $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Tällöin $\bar{v} \in W^{\perp}$, jos ja vain jos $\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

*Todistus.* Todistetaan väite kahdessa osassa.

"$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} \in W^{\perp}$. Tällöin $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$. Erityisesti $\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$. Pyritään näyttämään, että tällöin $\bar{v} \in W^{\perp}$. On osoitettava, että $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$. Oletetaan siis, että $\bar{w} \in W$. Tällöin $\bar{w} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Sisätulon määritelmän ehtojen nojalla

$$\begin{aligned}
\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle &= \langle \bar{v}, a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k \rangle \\
&= \langle \bar{v}, a_1\bar{w}_1 \rangle + \langle \bar{v}, a_2\bar{w}_2 \rangle + \cdots + \langle \bar{v}, a_k\bar{w}_k \rangle \\
&= a_1\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle + a_2\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle + \cdots + a_k\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle \\
&= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Siten $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$, olipa $\bar{w}$ mikä tahansa aliavaruuden $W$ vektori. Näin ollen $\bar{v} \in W^{\perp}$. □

**Esimerkki 24.25.** Tarkastellaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta

$$W = \operatorname{span}\big((1, 0, 3)\,(2, 1, 5)\big),$$

joka on vektoreiden $\bar{w}_1 = (1, 0, 3)$ ja $\bar{w}_2 = (2, 1, 5)$ virittämä, origon kautta kulkeva taso. Kun määritetään tämän aliavaruuden kohtisuoraa komplementtia, riittää tarkastella pelkkiä virittäjävektoreita. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
W^{\perp} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\
&= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle = 0 \text{ ja } \langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle = 0\} \\
&= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{v} \cdot \bar{w}_1 = 0 \text{ ja } \bar{v} \cdot \bar{w}_2 = 0\} \\
&= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + 3v_3 = 0 \text{ ja } 2v_1 + v_2 + 5v_3 = 0\}.
\end{aligned}$$

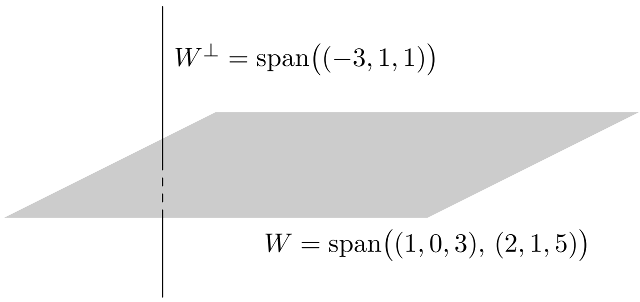
On siis ratkaistava yhtälöpari

$$\begin{cases} v_1 \phantom{{}+v_2} + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 + 5v_3 = 0. \end{cases}$$

Sen ratkaisut ovat $\bar{v} = (-3t, t, t)$, missä $t \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$W^{\perp} = \{(-3t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-3, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\big((-3, 1, 1)\big).$$

Ortogonaalinen komplementti on siis vektorin $(-3, 1, 1)$ virittämä suora (ks. kuva 24.83).




Kuva 24.83: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tason $W = \operatorname{span}\big((1, 0, 3)\,(2, 1, 5)\big)$ kohtisuora komplementti on suora $\operatorname{span}\big((-3, 1, 1)\big)$.

Ainoa vektori, joka on sekä aliavaruudessa että sen kohtisuorassa komplementissa, on nollavektori.

**Lause 24.26.** *Olkoon $W$ sisätuloavaruuden $V$ aliavaruus. Tällöin*

$$W \cap W^{\perp} = \{\bar{0}\}.$$

*Todistus.* "$\subset$": Oletetaan, että $\bar{u} \in W \cap W^{\perp}$. Nyt $\bar{u} \in W$ ja $\bar{u} \in W^{\perp}$. Kohtisuoran komplementin määritelmän mukaan tällöin pätee $\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$. Erityisesti $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$. Sisätulon määritelmästä seuraa, että $\bar{u} = \bar{0}$. Siis $W \cap W^{\perp} \subset \{\bar{0}\}$.

"$\supset$": Koska $W$ ja $W^{\perp}$ ovat aliavaruuksia, niin $\bar{0} \in W$ ja $\bar{0} \in W^{\perp}$. Siten $\bar{0} \in W \cap W^{\perp}$. Siis $\{\bar{0}\} \subset W \cap W^{\perp}$. $\square$

## 24.4 Kohtisuora projektio

Kurssin ensimmäisessä osassa käsiteltiin vektorin projektiota suoralle. Voidaan ajatella, että projektio on vektorin heittämä varjo, kun aurinko paistaa kohtisuoraan suoraa vastaan. Tässä luvussa yleistetään projektion käsitettä. Yhtä hyvin voidaan projisoida vektori vaikkapa tasolle. Tällöin projektio on vektorin varjo, joka syntyy, kun aurinko paistaa kohtisuoraan tasoa vastaan.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle alivaruudelle (eli suoralle) voidaan lauseen 13.14 mukaan laskea seuraavasti:

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Uudessa määritelmässä aliavaruus, jolle projisoidaan, voi olla useamman kuin yhden vektorin virittämä. Lisäksi pistetulon tilalla voi olla mikä tahansa sisätulo.

Projisoimista varten täytyy käsillä olla aliavaruuden ortogonaalinen kanta. Aliavaruudelle projisoitava vektori projisoidaan erikseen jokaisen kantavektorin virittämälle suoralle ja projektiot summataan yhteen. Näin saadaan vektorin projektio aliavaruudelle. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (3, 2, 1)$ projektio aliavaruudelle $W = \mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ (eli $xy$-tasolle) on

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_W(\bar{v}) &= \mathrm{proj}_{\bar{e}_1}(\bar{v}) + \mathrm{proj}_{\bar{e}_2}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \bar{e}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2} \bar{e}_2 \\
&= \frac{3}{1} \bar{e}_1 + \frac{2}{1} \bar{e}_2 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 = (3, 2, 0).
\end{aligned}$$

Vektorin kolmas komponentti muuttuu siis projisoitaessa nollaksi. Huomaa, että tässä käytetty kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on ortogonaalinen, sillä $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$.

Annetaan vielä täsmällinen määritelmä projektiolle.

**Määritelmä 24.27.** Oletetaan, että $W$ on sisätuloavaruuden $V$ aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle* $W$ on

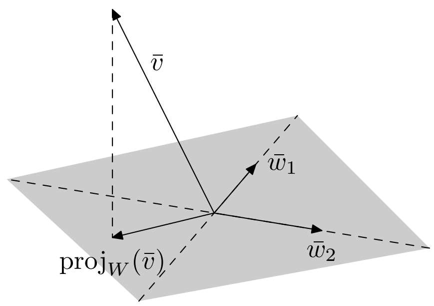
$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle} \bar{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \bar{w}_k.$$

Kurssin ensimmäisen osan merkintöjä käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}) + \mathrm{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{v}) + \cdots + \mathrm{proj}_{\bar{w}_k}(\bar{v}).$$

Jos $W = \mathrm{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$, voidaan kohtisuoralle projektiolle käyttää lyhennysmerkintää $\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_k}(\bar{v})$. Lisäksi kohtisuoraa projektiota kutsutaan usein lyhyesti vain projektioksi.

On ehdottoman tärkeää, että projektiota määritettäessä käytetään ortogonaalista kantaa. Tulemme myöhemmin näkemään, että ilman ortogonaalista kantaa mielikuva vektorin heittämästä varjosta ei pitäisi paikkaansa.




Kuva 24.84: Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle $W = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

**Esimerkki 24.28.** Määritetään vektorin $\bar{v} = (3, -1, 2)$ projektio avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudelle $W = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, missä $\bar{w}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{w}_2 = (-1, 1, 1)$. Sisätulona on tavallinen pistetulo.

Tarkistetaan ensin, muodostavatko alivaruuden virittäjävektorit ortogonaalisen kannan. Havaitaan, että $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = -1+1 = 0$, joten jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on ortogonaalinen. Lauseen 24.15 nojalla jono on näin ollen myös vapaa. Siten se on virittämänsä aliavaruden $W = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ kanta.

Nyt voidaan määrittää vektorin $\bar{v} = (3, -1, 2)$ projektio aliavaruudelle $W$. Määritelmän mukaan $\text{proj}_W(\bar{v})$ määritetään laskemalla vektorin $\bar{v}$ projektiot vektoreiden $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ virittämille aliavaruuksille:

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \text{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}) + \text{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 = \bar{w}_1 - \frac{2}{3}\bar{w}_2 = \frac{1}{3}(5, 1, -2).$$

Kohtisuoran projektion määritelmässä on käytettävä avaruuden $W$ *ortogonaalista kantaa.* Jos projektion kaavassa käyttää kantaa, joka ei ole ortogonaalinen, ei tulos ole toivottu. Myöhemmin todistettavasta lauseessa 24.38 seuraa, että jokaiselle äärellisulotteiselle avaruudelle löytyy ortogonaalinen kanta. Lisäksi osoitamme lauseessa 24.33, että valitulla kannalla ei ole vaikutusta siihen, mikä projektiovektori on. Oleellista on vain, että kanta on ortogonaalinen.

**Esimerkki 24.29.** Aiemmin määritettiin vektorin $\bar{v} = (3, 2, 1)$ projektio aliavaruudelle $W = \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, missä $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$. Se tehtiin laskemalla vektorin $\bar{v}$ projektiot vektoreiden $(1, 0, 0)$ ja $(0, 1, 0)$ virittämille aliavaruuksille. Tämä oli määritelmän mukaista, sillä $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on aliavaruuden $W$ ortogonaalinen kanta. Projektiovektoriksi saatiin $(3, 2, 0)$, eli projisoitaessa vektorin kolmannesta komponentista tuli nolla ja muut komponentit pysyivät ennallaan. Kun vektori projisoitiin vaakasuoralle tasolle, sen pystykomponentti siis katosi, mikä vastaa mielikuvaamme vektorin heittämästä varjosta.

Tutkitaan, mitä tapahtuu, jos käytetään kantaa, joka ei olekaan ortogonaalinen. Aliavaruudella $W$ on myös kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, missä $\bar{u}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$, eikä tämä kanta ole ortogonaalinen. Nyt vektorin $\bar{v} = (3, 2, 1)$ projektio vektorin $\bar{u}_1$ virittämälle aliavaruudelle on $\text{proj}_{\bar{u}_1}(\bar{v}) = (5/2)\bar{u}_1$ ja vektorin $\bar{u}_2$ virittämälle aliavaruudelle puolestaan $\text{proj}_{\bar{u}_2}(\bar{v}) = (2/1)\bar{u}_2 = 2\bar{u}_2$. Näiden projektiovektoreiden summa on $(5/2, 9/2, 0)$, joten tulos on aivan erilainen kuin edellisissä laskuissa. Se ei vastaa käsitystämme siitä, miltä projektion pitäisi näyttää. Tämä johtui siitä, ettei käytetty kanta ollut ortogonaalinen.

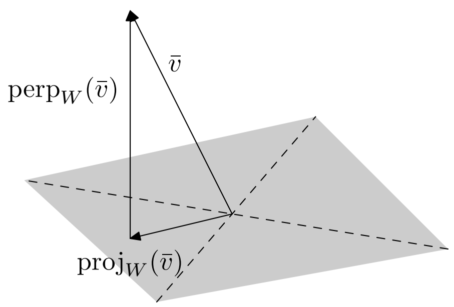
### Kohtisuora komponentti

Edellä mainittiin, että vektorin $\bar{v}$ projektio tasolle $W$ on varjo, jonka vektori heittää, kun aurinko paistaa kohtisuoraan tasoa vastaan. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että vektorit $\mathrm{proj}_W(\bar{v})$ ja $\bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v})$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

**Määritelmä 24.30.** Oletetaan, että $W$ on sisätuloavaruuden $V$ äärellisulotteinen aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora komponentti aliavaruutta $W$ vastaan* on

$$\mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}).$$

Merkintä perp tulee englannin kielen sanasta ”perpendicular”, joka tarkoittaa kohtisuoraa. Samaan tapaan kuin projektioilla voidaan käyttää lyhennysmerkitää $\mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \mathrm{perp}_{\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_k}(\bar{v})$.




Kuva 24.85: Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $W$ vastaan.

**Esimerkki 24.31.** Esimerkissä 24.28 nähtiin, että vektorin $\bar{v} = (3, -1, 2)$ kohtisuora projektio vektorien $\bar{w}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{w}_2 = (-1, 1, 1)$ virittämälle aliavaruudelle $W$ on $\frac{1}{3}(5, 1, -2)$. Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $W$ vastaan on siten

$$\mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}) = (3, -1, 2) - \frac{1}{3}(5, 1, -2) = \frac{1}{3}(4, -4, 8).$$

Vektorin $\bar{v}$ kohtisuora komponentti $\mathrm{perp}_W(\bar{v})$ on kohtisuorassa aliavaruutta $W$ vastaan. Se kuuluu siis kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp$. Kohtisuoruus seuraa siitä, että projektion määritelmässä vaadittiin ortogonaalinen kanta.

**Lause 24.32.** *Oletetaan, että $W$ on sisätuloavaruuden $V$ äärellisulotteinen aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Olkoon $\bar{v} \in V$. Tällöin* $\mathrm{perp}_W(\bar{v}) \in W^\perp$.

*Todistus.* Olkoon $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ aliavaruuden $W$ ortogonaalinen kanta. Nyt siis

$$\langle \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = 0, \text{kun } i \neq j.$$

Lauseen 24.24 nojalla riittää osoittaa, että $\langle \mathrm{perp}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$. Oletetaan, että $i \in \{1, \dots, k\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\langle \text{perp}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle &= \langle \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \langle \text{proj}_W(\bar{v}), \bar{w}_i \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \left\langle \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 + \dots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \bar{w}_k, \bar{w}_i \right\rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \left( \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \langle \bar{w}_1, \bar{w}_i \rangle + \dots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \langle \bar{w}_k, \bar{w}_i \rangle \right) \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle}{\langle \bar{w}_i, \bar{w}_i \rangle} \langle \bar{w}_i, \bar{w}_i \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle - \langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0,
\end{aligned}$$

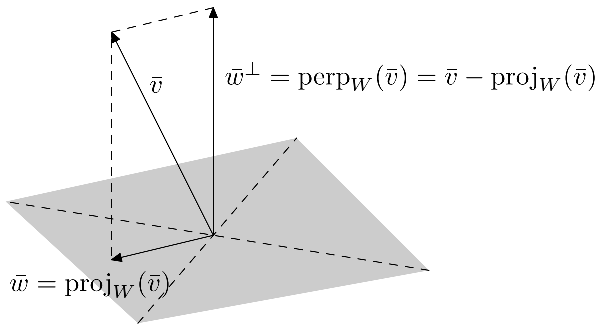
sillä $\langle \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = 0$, kun $i \neq j$.

Vektori $\text{perp}_W(\bar{v})$ on siis kohtisuorassa kaikkia kantavektoreita vastaan. Tästä seuraa, että $\text{perp}_W(\bar{v}) \in W^\perp$. Huomaa, että todistuksessa käytettiin hyväksi projektion määritelmässä esiintyvää ortogonaalista kantaa. □

**Lause 24.33.** *Oletetaan, että $W$ on sisätuloavaruuden $V$ äärellisulotteinen aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Olkoon $v \in V$. Tällöin on olemassa täsmälleen yhdet vektorit $\bar{w} \in W$ ja $\bar{w}^\perp \in W^\perp$, joille pätee*

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^\perp.$$

Osoittautuu, että lauseessa mainitut vektorit ovat $\text{proj}_W(\bar{v})$ ja $\text{perp}_W(\bar{v})$.




Kuva 24.86: Vektori $\bar{v}$ voidaan kirjoittaa summana vektoreista, jotka ovat aliavaruuksien $W$ ja $W^\perp$ alkioita.

*Todistus.* Valitaan $\bar{w} = \text{proj}_W(\bar{v})$ ja $\bar{w}^\perp = \text{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v})$. Projektion määritelmästä nähdään, että $\bar{w} \in W$, ja lauseen 24.32 nojalla $\bar{w}^\perp \in W^\perp$. Lisäksi $\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^\perp$.

Osoitetaan vielä, että mitkään muut vektorit eivät toteuta annettuja ehtoja. Oletetaan, että $\bar{w}, \bar{u} \in W$, $\bar{w}^\perp, \bar{u}^\perp \in W^\perp$ ovat ehdot toteuttavia vektoreita. Nyt siis $\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}^\perp = \bar{u} + \bar{u}^\perp$. Tästä seuraa, että

$$\bar{w} - \bar{u} = \bar{u}^\perp - \bar{w}^\perp.$$

Toisaalta $W$ ja $W^\perp$ ovat aliavaruuksia, joten $\bar{w}-\bar{u} \in W$ ja $\bar{u}^\perp - \bar{w}^\perp \in W^\perp$. Kuitenkin lauseen 24.26 nojalla $W \cap W^\perp = \{\bar{0}\}$, joten $\bar{w}-\bar{u}=\bar{0}$ ja $\bar{w}^\perp - \bar{u}^\perp = \bar{0}$. Tästä seuraa, että $\bar{w}=\bar{u}$ ja $\bar{w}^\perp = \bar{u}^\perp$. Siten ehdot toteuttavia vektoreita on vain yhdet. □

### Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö

Todistetaan vielä lopuksi projektion avulla muutama hyödyllinen sisätuloon ja normiin liittyvä tulos. Esimerkiksi Schwarzin epäyhtälöä käytettiin jo luvussa 13.

**Lause 24.34** (Schwarzin epäyhtälö)**.** *Olkoon $V$ sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v},\bar{w} \in V$. Tällöin*

$$|\langle \bar{v},\bar{w}\rangle| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

*Todistus.* Oletetaan ensin, että $\bar{w}=\bar{0}$. Nyt $\langle \bar{v},\bar{w}\rangle = 0$ ja $\|\bar{w}\|=0$, joten väite pätee.

Oletetaan sitten, että $\bar{w}\neq\bar{0}$. Nyt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\bar{v}-\mathrm{proj}_w(\bar{v})\|^2 \\
&= \langle \bar{v}-\mathrm{proj}_w(\bar{v}), \bar{v}-\mathrm{proj}_w(\bar{v})\rangle \\
&= \left\langle \bar{v} - \frac{\langle \bar{w},\bar{v}\rangle}{\langle \bar{w},\bar{w}\rangle}\bar{w},\ \bar{v} - \frac{\langle \bar{w},\bar{v}\rangle}{\langle \bar{w},\bar{w}\rangle}\bar{w} \right\rangle \\
&= \langle \bar{v},\bar{v}\rangle - \frac{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle}{\langle \bar{w},\bar{w}\rangle}\langle \bar{v},\bar{w}\rangle - \frac{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle}{\langle \bar{w},\bar{w}\rangle}\langle \bar{w},\bar{v}\rangle + \frac{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle^2}{\langle \bar{w},\bar{w}\rangle^2}\langle \bar{w},\bar{w}\rangle \\
&= \|\bar{v}\|^2 - 2\frac{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle^2}{\|\bar{w}\|^2} + \frac{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle^2}{\|\bar{w}\|^2} \\
&= \|\bar{v}\|^2 - \frac{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle^2}{\|\bar{w}\|^2}.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $\langle \bar{v},\bar{w}\rangle^2 \leq \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2$. Nyt voidaan päätellä, että

$$|\langle \bar{v},\bar{w}\rangle| = \sqrt{\langle \bar{v},\bar{w}\rangle^2} \leq \sqrt{\|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2} = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

□

**Lause 24.35** (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon $V$ sisätuloavaruus. Tällöin*

$$\|\bar{v}+\bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$$

*kaikilla $\bar{v},\bar{w}\in V$.*

*Todistus.* Ensinnäkin huomataan, että

$$\begin{aligned}
\|\bar{v}+\bar{w}\|^2 &= \langle \bar{v}+\bar{w}, \bar{v}+\bar{w}\rangle \\
&= \langle \bar{v},\bar{v}\rangle + \langle \bar{v},\bar{w}\rangle + \langle \bar{w},\bar{v}\rangle + \langle \bar{w},\bar{w}\rangle \\
&= \|\bar{v}\|^2 + 2\langle \bar{v},\bar{w}\rangle + \|\bar{w}\|^2 \\
&\leq \|\bar{v}\|^2 + 2|\langle \bar{v},\bar{w}\rangle| + \|\bar{w}\|^2.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan käyttää Schwarzin epäyhtälöä:

$$\|\bar{v}\|^2 + 2|\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle| + \|\bar{w}\|^2 \leq \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| + \|\bar{w}\|^2 = (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2.$$

Näin saadaan $\|\bar{v} + \bar{w}\|^2 \leq (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2$. Koska normit ovat positiivisia, tästä voidaan päätellä, että

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|.$$

□

### Ortonormaalin kannan etsiminen

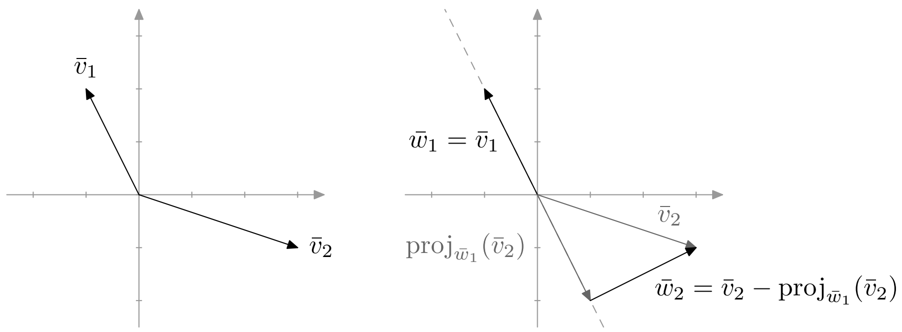
Projektion määrittämistä varten aliavaruudelle pitää etsiä ortogonaalinen kanta. Kohta esiteltävän Gramin–Schmidtin menetelmän avulla kannasta voidaan muokata ortogonaalinen ja edelleen ortonormaali. Tutkitaan ensin, miten kahden vektorin muodostamasta kannasta saadaan ortonormaali kohtisuoran komponentin avulla.

**Esimerkki 24.36.** Merkitään $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (3, -1)$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Vektorit $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ eivät nimittäin ole yhdensuuntaisia ja siksi ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Koska jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vapaa ja siinä on kaksi vektoria, se on lauseen 18.13 mukaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Muokataan jonosta $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ avaruudelle $\mathbb{R}^2$ ortogonaalinen kanta, kun sisätulona on pistetulo. Muodostetaan uusi jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ valitsemalla $\bar{w}_1 = \bar{v}_1 = (-1, 2)$ ja

$$\bar{w}_2 = \text{perp}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) = \bar{v}_2 - \text{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) = (2, 1).$$

Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat ortogonaaliset lauseen 24.32 perusteella. Lisäksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, minkä voi osoittaa samaan tapaan kuin edellä.

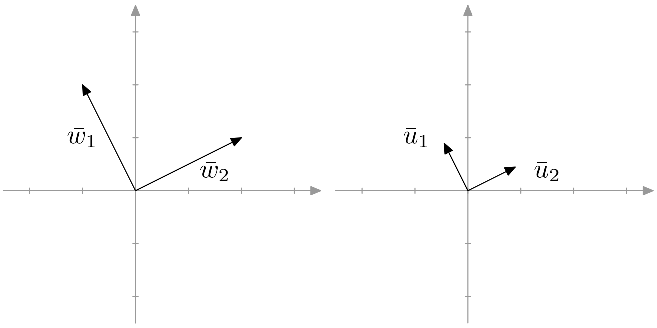



Kuva 24.87: Kannan $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ muuttaminen ortogonaaliseksi kannaksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

Näin saadusta ortogonaalisesta kannasta voidaan vielä muodostaa ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ valitsemalla

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\|\bar{w}_1\|}\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\|\bar{w}_2\|}\bar{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Jono $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaali kanta.




Kuva 24.88: Ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ja ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Myös useamman vektorin tapauksessa voidaan käyttää kohtisuoria komponentteja.

**Esimerkki 24.37.** Vektorit $\bar{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_2 = (-2, 0, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (0, 1, 1)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. (Tämän osoittamiseen riittää lauseen 18.13 perusteella näyttää, että jono on vapaa tai että se virittää avaruuden $\mathbb{R}^3$. Se jätetään lukijalle.) Ryhdytään muodostamaan näistä kolmesta vektorista kantaa $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$, joka on ortogonaalinen tavallisen pistetulon suhteen.

Uuden kannan ensimmäiseksi vektoriksi voidaan ottaa mikä tahansa vektoreista $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$. Valitaan $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$. Toiseksi vektoriksi valitaan vektorin $\bar{v}_2$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $\operatorname{span}(\bar{w}_1)$ vastaan:

$$\bar{w}_2 = \operatorname{perp}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) = \bar{v}_2 - \operatorname{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 = (-1, 1, 1).$$

Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat lemman 24.32 nojalla kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lauseen 24.15 perusteella jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on vapaa, joten se muodostaa aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ortogonaalisen kannan (ks. lause 18.13).

Kolmanneksi vektoriksi valitaan vektorin $\bar{v}_3$ kohtisuora komponentti aliavaruutta $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ vastaan:

$$\bar{w}_3 = \operatorname{perp}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2}(\bar{v}_3) = \bar{v}_3 - \operatorname{proj}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2}(\bar{v}_3) = \bar{v}_3 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 = \frac{1}{6}(1, -1, 2).$$

Huomaa, että projektion laskemiseen tarvitaan tietoa siitä, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ortogonaalinen kanta. Vektori $\bar{w}_3$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ vastaan lemman 24.32 perusteella. Siten jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on ortogonaalinen.

Lauseen 24.15 nojalla jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on vapaa. Koska avaruuden $\mathbb{R}^3$ dimensio on kolme, on jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ avaruuden kanta. Näin saatiin siis aikaan ortogonaalinen kanta.

**Lause 24.38** (Gramin–Schmidtin menetelmä)**.** *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on sisätuloavaruuden $V$ kanta. Tällöin avaruudella $V$ on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$, joka saadaan seuraavasti:*

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{v}_1 \\ \bar{w}_2 &= \operatorname{perp}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) \\ \bar{w}_3 &= \operatorname{perp}_{\bar{w}_1, \bar{w}_2}(\bar{v}_3) \\ &\vdots \\ \bar{w}_n &= \operatorname{perp}_{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{n-1}}(\bar{v}_n). \end{aligned}$$

*Tästä ortogonaalisesta kannasta saadaan ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ asettamalla*

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\|\bar{w}_i\|}\bar{w}_i$$

*kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Lisäksi $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ortogonaalinen kanta jokaisella $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Huomaa, että edellisessä lauseessa ortogonaalisen kannan vektorit voidaan kohtisuoran komponentin määritelmän ja kohtisuoran projektion määritelmän mukaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{v}_1 \\ \bar{w}_2 &= \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 \\ \bar{w}_3 &= \bar{v}_3 - \frac{\langle \bar{v}_3, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 - \frac{\langle \bar{v}_3, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 \\ &\vdots \\ \bar{w}_n &= \bar{v}_n - \frac{\langle \bar{v}_n, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 - \frac{\langle \bar{v}_n, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 - \cdots - \frac{\langle \bar{v}_n, \bar{w}_{n-1} \rangle}{\langle \bar{w}_{n-1}, \bar{w}_{n-1} \rangle}\bar{w}_{n-1}. \end{aligned}$$

Todistetaan seuraavaksi edellinen lause eli Gramin-Schmidtin menetelmä.

*Todistus.* Merkitään $V_k = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Havaitaan, että vektori $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$ muodostaa aliavaruuden $V_1 = \operatorname{span}(\bar{v}_1)$ ortogonaalisen kannan.

Oletetaan, että $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on sellainen, että jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $V_k$ ortogonaalinen kanta. Osoitetaan, että tällöin jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{w}_{k+1})$ on aliavaruuden $V_{k+1}$ ortogonaalinen kanta.

Näytetään ensin, että jonon $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{w}_{k+1})$ vektorit kuuluvat aliavaruuteen $V_{k+1}$. Oletuksen mukaan jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $V_k$ ortogonaalinen kanta, joten

$$\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k \in V_k = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) \subset \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1}) = V_{k+1}\,.$$

Siis $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k \in V_{k+1}$. Lisäksi vektori $\bar{w}_{k+1}$ on lineaarikombinaatio vektoreista $\bar{v}_{k+1} \in V_{k+1}$ ja $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k \in V_{k+1}$:

$$\bar{w}_{k+1} = \operatorname{perp}_{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k}(\bar{v}_k) = \bar{v}_{k+1} - \frac{\langle \bar{v}_{k+1}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 - \frac{\langle \bar{v}_{k+1}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 - \cdots - \frac{\langle \bar{v}_{k+1}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle}\bar{w}_k.$$

Tiedetään, että $V_{k+1}$ on aliavaruus, joten sen vektorien lineaarikombinaatio $\bar{w}_{k+1} \in V_{k+1}$.

Näytetään seuraavaksi, että jonon $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{w}_{k+1})$ vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on oletuksen mukaan ortogonaalinen, joten riittää osoittaa, että $\bar{w}_{k+1}$ on kohtisuorassa kaikkia tämän jonon vektoreita vastaan. Määritelmän mukaan

$$\bar{w}_{k+1} = \operatorname{perp}_{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k}(\bar{v}_k)\,.$$

Lauseen 24.32 mukaan tällöin $\bar{w}_{k+1} \in \operatorname{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)^{\perp}$. Näin $\bar{w}_{k+1}$ on kohtisuorassa kaikkia ortogonaalisen jonon $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ vektoreita vastaan.

Näytetään sitten, että mikään jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{w}_{k+1})$ vektoreista ei ole nollavektori. Oletuksen mukaan jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on ortogonaalinen, joten $\bar{w}_i \neq \bar{0}$ kaikilla $i \in \{1, \dots, k\}$. Jos olisi $\bar{w}_{k+1} = \bar{0}$, niin $\operatorname{perp}_{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k}(\bar{v}_k) = \bar{0}$ ja edelleen $\bar{v}_{k+1} - \operatorname{proj}_{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k}(\bar{v}_{k+1}) = \bar{0}$ eli

$$\bar{v}_{k+1} = \operatorname{proj}_{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k}(\bar{v}_{k+1}).$$

Tällöin $\bar{v}_{k+1} \in \operatorname{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$. Oletuksen mukaan $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $V_k$ kanta, joten $\bar{v}_{k+1} \in V_k = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$. Näin $\bar{v}_{k+1}$ on vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatio. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on sisätuloavaruuden $V$ kanta ja siten vapaa. Siis $\bar{w}_{k+1} \neq \bar{0}$.

Näytetään lopuksi, että avaruuden $V_{k+1}$ ortogonaalinen jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{w}_{k+1})$ on aliavaruuden $V_{k+1}$ kanta. Aliavaruuden $V_{k+1} = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1})$ dimensio on $\dim(V_{k+1}) = k+1$, sillä jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1})$ on kannan $\mathcal{B}$ osajonona vapaa (lause 17.9) ja siten se on virittämänsä aliavaruuden $V_{k+1}$ kanta. Lauseen 24.15 nojalla ortogonaalinen jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k, \bar{w}_{k+1})$ on vapaa. Lisäksi sen pituus on sama kuin avaruuden $V_{k+1}$ dimensio. Lauseen 18.13 nojalla se on aliavaruuden $V_{k+1}$ kanta. □

Lauseesta 24.38 seuraa, että jokaisella äärellisulotteisella vektoriavaruudella on ortogonaalinen kanta.

**Esimerkki 24.39.** Etsitään avaruudelle $\mathbb{R}^3$ ortogonaalinen kanta, jonka yksi vektori on $\bar{w}_1 = (1, 2, 3)$. Valitaan aluksi vaikkapa $\bar{v}_2 = (0, 1, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (0, 0, 1)$. Tällöin jono $(\bar{w}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Tämän osoittamiseen riittää lauseen 18.13 perusteella näyttää, että jono on vapaa tai että se virittää avaruuden $\mathbb{R}^3$. Se jätetään lukijalle.

Ortogonalisoidaan kanta $(\bar{w}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Valitaan toiseksi kantavektoriksi

$$\bar{w}_2' = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 = \bar{v}_2 - \frac{2}{14}\bar{w}_1 = (-1/7, 5/7, -3/7).$$

Tässä vaiheessa vektoria $\bar{w}_2'$ kannattaa vielä kertoa skalaarilla 7, jotta päästään eroon ikävistä murtoluvuista. Valitaankin kantavektoriksi siis

$$\bar{w}_2 = 7\bar{w}_2' = (-1, 5, -3).$$

Kolmas kantavektorikandidaatti on

$$\bar{w}_3' = \bar{v}_3 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 = \bar{v}_3 - \frac{3}{14}\bar{w}_1 - \frac{-3}{35}\bar{w}_2 = (-3/10,\ 0,\ 1/10)$$

Vaihdetaan vielä tämänkin vektorin tilalle siistimpi skalaarimonikerta

$$\bar{w}_3 = 10\bar{w}_3' = (-3, 0, 1).$$

Tällöin $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortogonaalinen kanta.

Tässä esimerkissä ikävät kantavektorit merkittiin kaukonäköisesti pilkulla, jotta haluttuja kantavektoreita voitiin merkitä symbolilla $w$. Käytännössä ei tietenkään voi etukäteen tietää, onko vektoriin tulossa murtolukuja vai ei, joten pilkkuja voi halutessaan lisätä vektoreiden nimiin jälkikäteen.

**Lause 24.40.** *Oletetaan, että $V$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $W$ sen aliavaruus. Tällöin*

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V).$$

*Todistus.* Olkoon $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ aliavaruuden $W$ ortogonaalinen kanta ja $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ aliavaruuden $W^\perp$ ortogonaalinen kanta. Tällaiset kannat ovat olemassa lauseen 24.38 nojalla. Osoitetaan, että $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on avaruuden $V$ kanta, mikä todistaa väitteen.

Havaitaan, että $\langle \bar{w}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $j \in \{1, \ldots, l\}$, sillä $\bar{w}_i \in W$ ja $\bar{v}_j \in W^\perp$. Lisäksi kummassakin jonossa jonon vekorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Näin jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on ortogonaalinen ja siten vapaa lauseen 24.15 nojalla.

Oletetaan, että $\bar{u} \in V$. Lauseen 24.33 mukaan on olemassa yksi sellainen vektori $\bar{w} \in W$ ja yksi sellainen vektori $\bar{w}^\perp \in W^\perp$, että $\bar{u} = \bar{w} + \bar{w}^\perp$. Vektori $\bar{w} \in W$ voidaan kirjoittaa kantavektorien $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ lineaarikombinaationa ja vektori $\bar{w}^\perp \in W^\perp$ kantavektorien $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ lineaarikombinaationa, joten vektori $\bar{u}$ voidaan kirjoittaa jonon $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ vektorien lineaarikombinaationa. Siis $\mathrm{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l) = V$.

On näytetty, että $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_l)$ on avaruuden $V$ kanta. Siis

$$\dim(V) = k + l = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$

□

# Hakemisto