Tehtävä:

Tässä tehtäväsarjassa tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, missä $\bar{v}_1 = (1, -1, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 3, 3)$.

Etsi aliavaruudelle W ortogonaalinen kanta seuraavasti: Valitse ensimmäiseksi kantavektoriksi $\bar{v}_1$ ja etsi sitten vektori, joka on ortogonaalinen vektorin $\bar{v}_1$ kanssa. Käytä tässä apuna projektiota $\mathrm{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{v}_2)$.

Ratkaisuehdotus:

Olkoot $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$ ja $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) = \mathrm{perp}_{\mathrm{span}(\bar{w}_1)}(\bar{v}_2)$. Tällöin vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lasketaan

$$\begin{aligned}
\bar{w}_2 &== \bar{v}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) \\
&= (0, 3, 3) - \frac{(0, 3, 3) \cdot (1, -1, -1)}{(1, -1, -1) \cdot (1, -1, -1)}(1, -1, -1) \\
&= (0, 3, 3) + 2(1, -1, -1) = (2, 1, 1).
\end{aligned}$$

Vektori $\bar{w}_1$ on aliavaruuden W alkio, sillä se on yksi virittäjävektoreista. Vektori $\bar{w}_2$ puolestaan on lineaarikombinaatio vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$, joten sekin on aliavaruuden W alkio.

Koska vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin niiden muodostama jono on vapaa kurssimateriaalin lauseen nojalla. Lisäksi aliavaruuden W dimensio on kaksi, mistä seuraa, että vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ muodostavat aliavaruuden kannan.

Näin ollen vektorit $(1, -1, -1)$ ja $(2, 1, 1)$ muodostavat ortogonaalisen kannan aliavaruudelle W.