Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

9.12.2016

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Ensi viikolla luennot normaalisti.
- Kurssisivulla on joulukalenteri. Sieltä löytyy kertaustehtäviä.

Istu riville, joka vastaa sukunimesi alkukirjainta.

Palaute Stack-tehtävistä.

Kurssin kokonaiskuva.

Tutustu vieressä istuvaan ihmiseen

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi. Jos olette vanhoja tuttuja, jutustelkaa niitä näitä.

Seuraavat ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

(b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

(c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

(d) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$; lisäksi $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Vektoriavaruuden V *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden V alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(b) $\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

(c) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(d) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; lisäksi $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Pohdintatehtävä

Halutaan approksimoida funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Kumpi seuraavista funktioista sopii tähän paremmin?

(a) $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$

(b) $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x + 0{,}5$

Mikä on paras mahdollinen suora, jolla eksponenttifunktiota voi arvioida?

Vektorien välinen etäisyys

On tutkittava, kumpi annetuista funktioista on *lähempänä* eksponenttifunkiota. Kuinka määritetään vektorien välinen etäisyys?

- Miltä näyttää kuvassa vektoreiden $\bar{v} = (-4, 2)$ ja $\bar{w} = (1, -3)$ välinen etäisyys?
- Miten etäisyyden voisi määrittää laskemalla?

Tutkitaan vektoriavaruutta

$$C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

Tässä avaruudessa voi määritellä sisätulon kaavalla $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

- Määritetään funktioiden f ja g etäisyys.
- Määritetään funktioiden f ja h etäisyys.

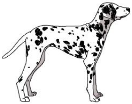
Kumpi on pienempi?

Haluatataan selvittää, mikä suoran span$((1, -3))$ vektori on lähimpänä vektoria $(-4, 2)$? Millä tavalla sen voisi saada selville?

Halutaan selvittää, mikä suora on lähimpänä eksponenttifunktiota. Millä tavalla sen voisi selvittää?

Keksi mahdollisimman monta avaruutta, joiden dimensio on 3.

Mikä on paras luonnehdinta isomorfismille?



Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on isomorfismi, jos ja vain jos

(a) se on bijektio.

(b) se on injektio ja surjektio.

(c) $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$ ja $\operatorname{Im} L = U$.

(d) Vektoriavaruuksien välillä oleva isomorfismi tarkoittaa sitä, että avaruudet ovat käytännössä samanlaiset.