Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

18.11.2016

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Koetulokset ovat ilmestyneet kurssisivulle.
- Tutustu myös ratkaisuehdotukseen.
- Arvosanarajoja ei ole vielä päätetty.
- Kokeenkatsomistilaisuus järjestetään lähitulevaisuudessa.

Entä jos koe meni huonosti?

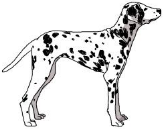
- Koemenestystä tärkeämpää on, että osaat kurssin perusasiat. Niitä tarvitaan muilla kursseilla.
- Voit tarkistaa osaamisesi oppimistavoitteista. Osaamisesta kertoo myös se, että olet osannut tehdä tehtäviä.
- Osaamistaan voi kartuttaa vielä kurssikokeen jälkeenkin.
- Kokeen voi uusia niin monta kertaa kuin haluaa.

Tutustu vieressä istuvaan ihmiseen

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi. Jos olette vanhoja tuttuja, jutustelkaa niitä näitä.

Mitä lineaarikuvauksen määritelmä oikein sanoo?



Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Matriiseista saadaan lineaarikuvauksia

https://tube.geogebra.org/m/157957

Kelpuutatko ratkaisun?

Osoita, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1^2, 0)$ ei ole lineaarinen.

Ratkaisu: Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} L(\bar{v} + \bar{w}) &= L(v_1 + w_1,\ v_2 + w_2) = ((v_1 + w_1)^2,\ 0) \\ &= (v_1^2 + 2v_1 w_1 + w_1^2,\ 0). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$L(\bar{v}) + L(\bar{w}) = (v_1^2, 0) + (w_1^2, 0) = (v_1^2 + w_1^2,\ 0).$$

Koska $(v_1^2 + 2v_1 w_1 + w_1^2,\ 0) \neq (v_1^2 + w_1^2,\ 0)$, kuvaus L ei ole lineaarinen.

Kumpi ratkaisu on mielestäsi parempi?

Kuuluuko matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ aliavaruuteen

$$\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)?$$

Ratkaisu 1: Huomataan, että

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska A on virittäjävektoreiden lineaarikombinaatio, se on aliavaruuden alkio.

Ratkaisu 2: Tutkitaan, onko yhtälöllä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ratkaisuja ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$).

Yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

ja tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - 2x_1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 1 = 0 \\ x_2 - x_3 & = 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -4 \\ 2x_1 & = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Koska ratkaisu löytyy, on A aliavaruuden alkio.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 &= 1 \qquad \Rightarrow \quad v_2 = 1 - 2v_1 \Leftrightarrow v_2 = 1 - 1 = 0 \\ v_1 + v_2 &= 2 \\ v_2 - v_3 &= 4 \qquad \Rightarrow \quad v_3 = -4 \\ 2v_1 &= 1 \qquad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Pitääkö seuraava väite paikkansa?

Jos

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 & = 1 \\ v_1 + v_2 & = 2 \\ v_2 - v_3 & = 4 \\ 2v_1 & = 1, \end{cases}$$

niin $v_1 = 1/2$, $v_2 = 0$ ja $v_3 = -4$.

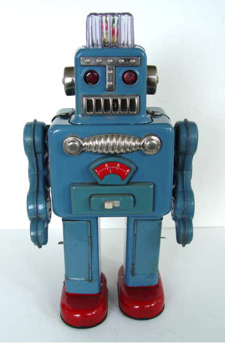
Pitääkö seuraava väite paikkansa?

Jos $v_1 = 1/2$, $v_2 = 0$ ja $v_3 = -4$, niin

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 & = 1 \\ v_1 + v_2 & = 2 \\ v_2 - v_3 & = 4 \\ 2v_1 & = 1. \end{cases}$$

Lineaarialgebran sovellus: Koodit

Liikutetaan kauko-ohjattavan robotin kättä



Viesti	ylös	alas	vasen	oikea
Koodi	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

Sovellus: Koodit

Viesti	ylös	alas	vasen	oikea
Koodi	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

Viestin välityksessä voi tapahtua virhe ja esim. ykkönen muuttua nollaksi. Miten koodia voisi parantaa niin, että virheelliset viestit tunnistaa?

Virheen tunnistava koodi

Viesti	ylös	alas	vasen	oikea
Koodi	(0,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,0)

- Jos kahden ensimmäisen komponentin summa on **parillinen**, kolmas on **nolla**.
- Jos kahden ensimmäisen komponentin summa on **pariton**, kolmas on **yksi**.

Viimeinen merkki on tarkistusmerkki

- henkilötunnus
  - **131052**-**308**T
  - viimeinen merkki on jakojäännös luvulla 31 jaettaessa
- pankkisiirtojen viitenumerot
  - pistetulo vektorin $(7, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 3, 1)$ kanssa on jaollinen luvulla 10

Virheen korjaava koodi

On olemassa myös koodeja, jotka osaavat korjata virheitä.

Apuna matriisit ja lineaarikuvaukset.