Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

4.11.2016

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Ilmoittaudu kurssille.
- Käytä tehtävien palautuksessa uutta kurssitunnusta (M=matriisilaskenta). Ohjeet kurssitunnuksen luomiseen löytyvät kurssisivulta.
- Koetulokset viimeistään kuukauden kuluttua kokeesta.

Tutustu vieressä istuvaan ihmiseen

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Itse keksitty laskutoimitus

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ yhteenlasku $\boxplus$ ja skalaarikertolasku $\boxdot$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1) \\ c \boxdot (x_1, x_2) &= (cx_1, c^2 x_2) \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $(-1, 1)$ on nollavektori.

Oletetaan, että $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tapa 1 Oletetaan, että $(-1, 1)$ on nollavektori. Nyt
$(x_1, x_2) \boxplus (-1, 1) = (x_1, x_2)$
$\Rightarrow (x_1 - 1 + 1, x_2 + 1 - 1) = (x_1, x_2)$
$\Rightarrow (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

Tapa 2 Nähdään, että

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2) \boxplus (-1, 1) \\ &= (x_1 - 1 + 1, x_2 + 1 - 1) \\ &= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Tapa 3

$$
\begin{aligned}
&(x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \\
&(x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1) = (x_1, x_2) \\
&x_1 + y_1 + 1 = x_1,\ \ x_2 + y_2 - 1 = x_2 \\
&y_1 = -1,\ \ y_2 = 1
\end{aligned}
$$

Siten $(-1, 1)$ on nollavektori.

Onko vektorilla $(2, -3)$ vastavektoria?

(a) Ei ole.
(b) Kyllä, se on $(2, -3)$.
(c) Kyllä, se on $(-4, 2)$.
(d) Kyllä, se on $(-3, 4)$.
(e) Kyllä, se on $(-4, 5)$.
(f) Kyllä, jokin muu.

Lisäkysymys 1: Onko millä tahansa vektorilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vastavektori?

Lisäkysymys 2: Onko $\mathbb{R}^2$ laskutoimituksilla $\boxplus$ ja $\boxdot$ varustettuna vektoriavaruus?

Voiko näin sanoa? Mistä sen tietää?

(a) Matriisi $\begin{bmatrix} 15 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ on vektori.

(b) Polynomi $x^2 - 4x - 16$ on vektori.

(c) Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{4x} - \sin(5x)$ on vektori.

Mitkä väitteistä ovat kelvollisia? Äänestä:
presemo.helsinki.fi/joh

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Funktioiden yhteenlasku ja skalaarikertolasku.

Mitä hyötyä voi olla siitä, että funktiota ajatellaan vektorina?

Esimerkki differentiaaliyhtälöstä

$$y' + ay = 0$$

Lotka-Volterran yhtälö

$$x' = ax + bxy$$
$$y' = cxy + dy$$

- x on saaliseläinten lukumäärä
- y on petoeläinten lukumäärä
- x' ja y' ovat populaatioiden kasvunopeuksia
- a, b, c ja d ovat lajien vuorovaikutusta kuvaavia parametrejä

Mikä ei kuulu joukkoon?

Oletetaan, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat vektoreita. Mikä seuraavista ei kuulu joukkoon?

(a) $\bar{v}/\bar{w}$

(b) $(\bar{w} \cdot \bar{w})/(\bar{v} \cdot \bar{v})$

(c) $\bar{v} \cdot 3$

(d) $\bar{v}^2$

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.