Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

2.11.2016

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Ilmoittaudu kurssille.
- Käytä tehtävien palautuksessa uutta kurssitunnusta (M=matriisilaskenta). Saat tiedon kurssistunnuksestasi tämän päivän aikana.
- Koetulokset viimeistään kuukauden kuluttua kokeesta.

Tutustu vieressä istuvaan ihmiseen

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Milloin osallistuit kurssille Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I?

(a) tänä syksynä
(b) viime syksynä
(c) aiemmin
(d) avoimessa yliopistossa
(e) joskus muulloin tai jossain muualla
(f) en ole suorittanut kurssia

Lue läpi kurssisivu (erityisesti, jos et osallistunut kurssin ykkösosaan tänä syksynä).

Oletko käynyt kurssin Johdatus yliopistomatematiikkaan tai käytkö sitä paraikaa?

Johdatus yliopistomatematiikkaan on tämän kurssin esitietovaatimus. Kurssit voi myös käydä yhtä aikaa.

Vektori on

(a) nuoli, jolla on suunta ja pituus.
(b) suure, jolla on suunta ja suuruus.
(c) origosta lähtevä nuoli.
(d) $ai + bj$
(e) (a, b)
(f) geenitekniikan apuväline.
(g) jotain muuta.
(h) En tiedä.

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja valitse vaihtoehto, joka on lähimpänä omaa näkemystäsi.

Vektoreiden laskusääntöjä

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

(g) $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

Mieti, mikä joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisi käyttäytyy samalla tavalla kuin nollavektori.

Mikä matriisi toimii vastavektorin tavoin matriisille

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}?$$

Matriisien laskusääntöjä

Oletetaan, että $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A + O = A$

(d) $A + (-A) = O$

(e) $a(A + B) = aA + aB$

(f) $(a + b)A = aA + bA$

(g) $(ab)A = a(bA)$

(h) $1A = A$.

Reaalilukujen laskusääntöjä

Oletetaan, että $v, w, u \in \mathbb{R}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $v + w = w + v$

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(c) $v + 0 = v$

(d) $v + (-v) = 0$

(e) $a(v + w) = av + aw$

(f) $(a + b)v = av + bv$

(g) $a(bv) = (ab)v$

(h) $1v = v$

Sana "vektori" saa nyt uuden, yleisemmän merkityksen.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Laskutoimitus

Määritelmässä lukee: ''Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla.''

Kysymyksiä:

- Onko yhteenlasku joukossa $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ määritelty laskutoimitus?
- Onko yhteenlasku joukossa $\{2, 4, 6, \ldots\}$ määritelty laskutoimitus?

Itse keksitty laskutoimitus

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ yhteenlasku $\boxplus$ ja skalaarikertolasku $\boxdot$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1)\\ c \boxdot (x_1, x_2) &= (cx_1, c^2 x_2)\end{aligned}$$

Tutkitaan, onko $\mathbb{R}^2$ vektoriavaruus, kun laskutoimituksina ovat $\boxplus$ ja $\boxdot$. Mikä vektori kelpaisi sen nollavektoriksi?

(a) Ei mikään.
(b) $(0, 0)$.
(c) $(-1, 1)$.
(d) $(1, -1)$.
(e) $(-1, -1)$.
(f) Jokin muu.

presemo.helsinki.fi/joh