Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 21.12.2016

Koeaika on 2,5 tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Selvitä seuraavissa tapauksissa, onko olemassa lineaarikuvausta L, joka toteuttaa annetut ehdot. Jos kuvaus on olemassa, anna kuvauksen määrittelevä kaava.

   (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ja $L(0,1,-1) = (-1,-1)$, $L(-2,2,0) = (-3,2)$ sekä $L(-2,0,2) = (0,1)$.

   (b) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja L venyttää vektorin $(-1,1)$ nelinkertaiseksi sekä kiertää vektoria $(1,0)$ myötäpäivään 90 astetta.

   Ratkaisuehdotus:

   (a) Ehdot täyttävää lineaarikuvausta ei ole olemassa. Jos nimittäin lineaarikuvaukselle L pätee $L(0,1,-1) = (-1,-1)$ ja $L(-2,2,0) = (-3,2)$, seuraa tästä, että

   $$\begin{aligned} L(-2,0,2) &= L(-2(0,1,-1) + (-2,2,0)) = -2L(0,1,-1) + L(-2,2,0) \\ &= -2(-1,-1) + (-3,2) = (-1,4) \neq (0,1). \end{aligned}$$

   Koska päädytään ristiriitaan, ei ehdot täyttävää lineaarikuvausta ole.

   (b) Ehdot täyttävä lineaarikuvaus on olemassa. Tämä johtuu siitä, että vektorit $(-1,1)$ ja $(1,0)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan, ja kurssin tuloksen mukaan lineaarikuvauksen voi aina määritellä antamalla kantavektorien arvot.

   Osoitetaan, että $((-1,1),(1,0))$ on tosiaankin avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Ensinnäkin jono on vapaa, sillä sen vektorit eivät ole yhdensuuntaisia. Lisäksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimension tiedetään olevan kaksi. Koska jonossa on kaksi vektoria, kyseessä on kanta.

   Nyt siis tiedetään, että ehdot toteuttava lineaarikuvaus on olemassa. Selvitetään vielä sen kaava. Tämän voi tehdä esimerkiksi määrittämällä luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit. Ehtojen perusteellä $L(1,0) = (-1,0)$. Tutkitaan sitten vektorin $(0,1)$ kuvavektoria. Tiedetään, että $L(-1,1) = (-4,4)$. Nyt

   $$L(0,1) = L((1,0) + (-1,1)) = L(1,0) + L(-1,1) = (-1,0) + (-4,4) = (-5,4).$$

   Nyt voidaan määrittää kuvauksen kaava. Oletetaan tätä varten, että $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

   $$L(x_1,x_2) = x_1L(1,0) + x_2L(0,1) = x_1(-1,0) + x_2(-5,4) = (-x_1 - 5x_2,\ 4x_2).$$

   Kuvaus määritellään siis ehdolla $L(x_1,x_2) = (-x_1 - 5x_2,\ 4x_2)$ kaikilla $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

   Vaihtoehtoisesti kuvauksen kaavan voi löytää määrittämällä kuvauksen matriisin. Matriisin sarakkeet ovat luonnollisen kannan kuvavektorit. Kuvauksen kaava saadaan kertomalla vektoria (x_1,x_2) löydetyllä matriisilla.

   Arviointiperusteet

   24 pistettä

   (a) 10 pistettä

   - Huomattu, että yksi annetuista lähtöjoukon vektoreista on toisten lineaarikombinaatio. 2p

- Laskettu kolmannen vektorin kuvavektori toisten avulla. 4p
- Päädytty ristiriitaan. 2p
- Todettu, että ehdot toteuttavaa kuvausta ei ole olemassa. 2p

(b) 14 pistettä

Tapa 1:

- Osoitettu, että annetut lähtöjoukon vektorit muodostavat kannan. Tässä helppoja yksityiskohtia saa sivuuttaa. 6p
- Vedottu kurssin tulokseen, jonka mukaan kuvaus on olemassa. 2p
- Määritetty kuvauksen kaava. 6p

Tapa 2:

- Keksitty kuvaus, joka toteuttaa ehdot. 4p
- Osoitettu, että ehdot toteutuvat. 4p
- Osoitettu, että kuvaus on lineaarinen. Tämän voi tehdä joko käyttämällä lineaarisuuden määritelmää tai antamalla kuvauksen matriisin. 6p

2. (a) Onko joukko $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid abc = 0\}$ avaruuden $\mathcal{P}_2$ aliavaruus?

(b) Ohessa on osoitettu, että

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus. Todistuksen loogisessa rakenteessa on kuitenkin puutteita, eikä se ole hyvällä matemaattisella tyylillä kirjoitettu. Kirjoita todistus uudelleen korjaten puutteet. Käytä ratkaisussasi kokonaisia suomen kielen virkkeitä.

Todistus:

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ratkaisuehdotus:

(a) Osoitetaan, että kyseessä ei ole aliavaruus. Polynomit $1 + x$ ja $x + x^2$ ovat joukon W alkioita. Niiden summa $1 + 2x + x^2$ ei kuitenkaan ole joukon W alkio. Siten kyseessä ei ole aliavaruus.

(b) Oletetaan, että $A, B \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$A = \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}$$

joillakin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Nähdään, että

$$A + B = \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix},$$

joten $A + B \in W$. Samoin

$$rA = r \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix},$$

joten $rA \in W$. Tutkitaan vielä nollavektoria. Huomataan, että

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siis nollavektori on joukon W alkio. Näin ollen W on avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

Arviointiperusteet

24 pistettä

(a) 12 pistettä

- Annettu konkreettinen vastaesimerkki. 8p
- Jos vastaesimerkki ei ole konkreettinen vaan on käytetty esimerkiksi polynomeja $a+bx$ ja $ax + bx^2$, on edellisestä kohdasta mahdollista saada korkeintaan 6 pistettä.
- Todettu, että kyseessä ei ole aliavaruus. (Nämä pisteet voi saada vain siinä tapauksessa, että edellisistä kohdista on tullut joitan pisteitä.) 2p
- Käytetty oikeita merkintöjä. (Ei ole esimerkiksi sekoitettu avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita ja polynomeja. Nämä pisteet voi saada vain siinä tapauksessa, että edellisistä kohdista on tullut joitan pisteitä.) 2p

(b) 12 pistettä

- Oletukset on kirjoitettu näkyviin. 4p
- Symbolit a, b, c, d on määritelty. 4p
- Käytetty kokonaisia suomen kielen virkkeitä. 2p
- Ratkaisu on kirjoitettu hyvällä kielellä. 2p

3. Tässä tehtävässä tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \text{span}((-1, 2, -1), (1, 1, 1))$ sekä vektoria $\bar{v} = (2, -5, 1)$. Sisätulona on tavallinen pistetulo.

(a) Määritä $\text{proj}_W(\bar{v})$. (Muistin virkistys: $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$.)

(b) Kaverisi on opiskellut lineaarialgebraa, mutta ei ole kuullut kohtisuorasta komplementista. Selitä hänelle sanallisesti, mitä kohtisuora komplementti tarkoittaa. Voit halutessasi piirtää myös havainnekuvia.

(c) Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen kohtisuoran komplementin $W^\perp$ alkio.

Ratkaisuehdotus:

(a)

$$\begin{aligned}
\text{proj}_W(\bar{v}) &= \frac{(2, -5, 1) \cdot (-1, 2, -1)}{(-1, 2, -1) \cdot (-1, 2, -1)} (-1, 2, -1) + \frac{(2, -5, 1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1) \\
&= -\frac{13}{6}(-1, 2, -1) + \frac{-3}{3}(1, 1, 1) \\
&= -\frac{13}{6}(-1, 2, -1) - (1, 1, 1) \\
&= \left(\frac{7}{6}, -\frac{29}{6}, \frac{7}{6}\right).
\end{aligned}$$

(b) Aliavaruuden kohtisuora komplemenetti koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan.

(c) Huomataan, että $\bar{v} = \mathrm{proj}_W(\bar{v}) + (\bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}))$. Lisäksi $\mathrm{proj}_W(\bar{v}) \in W$ ja $\bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}) \in W^{\perp}$. Siten summa $\bar{v} = \mathrm{proj}_W(\bar{v}) + \mathrm{perp}_W(\bar{v})$ toteuttaa tehtävän ehdot.

Edellisen tehtävän nojalla
$$\mathrm{proj}_W(\bar{a}) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{29}{6}, \frac{7}{6}\right),$$
jolloin
$$\bar{v} - \mathrm{proj}_W(\bar{v}) = (2, -5, 1) - \left(\frac{7}{6}, -\frac{29}{6}, \frac{7}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$
Haluamamme summa on siis
$$\bar{v} = \left(\frac{7}{6}, -\frac{29}{6}, \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

Arviointiperusteet

24 pistettä

(a) 6 pistettä

- Tarkistettu virittäjävektorien kohtisuoruus. 6p
- Muistettu projektion kaava. 2p
- Laskut laskettu oikein. 2p

(b) 8 pistettä

- Selkeästi ja ymmärrettävästi kirjoitettu selitys. 8p
- Selitys, jossa on pieniä puutteita. 6p
- Selitys, jossa on oikeanlaista ideaa. 4p
- Jotain oikeansuuntaista yritystä. 2p

(c) 10 pistettä

- Löydetty toimivat vektorit. 2p
- Perusteltu, että toinen vektoreista on aliavaruuden W alkio. 4p
- Perusteltu, että toinen vektoreista on aliavaruuden $W^{\perp}$ alkio. 4p

4. (a) Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit suoran $\mathrm{span}((-7, 5))$ suhteen. Etsi matriisia määrittämättä lineaarikuvauksen L ominaisarvot. Selitä, miksi löytämäsi luvut ovat kuvauksen ominaisarvoja. Perusteluiden ei tarvitse olla tarkat, vaan voit nojautua niissä esimerkiksi piirrokseen.

(b) Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarikuvaus. Osoita, että jos $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on kanta, niin L on isomorfismi.

Ratkaisuehdotus:

(a) Suoran $\mathrm{span}((-7, 5))$ vektorit eivät projektiossa muutu miksikään. Jos siis vektori $\bar{v}$ on suoran $\mathrm{span}((-7, 5))$ alkio, pätee $L(\bar{v}) = \bar{v} = 1\bar{v}$. Siten eräs kuvauksen ominaisarvo on 1.

Suoraa $\mathrm{span}((-7, 5))$ vastaan kohtisuorassa olevat vektorit (eli suoralla $\mathrm{span}((-7, 5))$ olevat vektorit) kuvautuvat projektiossa nollavektoriksi. Jos siis vektori $\bar{v}$ on suoran $\mathrm{span}((-7, 5))$ alkio, pätee $L(\bar{v}) = \bar{0} = 0\bar{v}$. Siten eräs kuvauksen ominaisarvo on 0.

Muita ominaisarvoja ei löydy.

(b) Oletetaan, että $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ on avaruuden W kanta. Osoitetaan, että L on isomorfismi. Tutkitaan ensin kuvauksen ydintä. Oletetaan, että $\bar{v} \in \operatorname{Ker} L$. Nyt $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $a_1, \dots, a_n$ ja lisäksi $L(\bar{v}) = \bar{0}$. Näin ollen $L(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = \bar{0}$ ja edelleen $a_1L(\bar{v}_1) + \cdots + a_nL(\bar{v}_n) = \bar{0}$. Koska jono $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ on kanta, se on vapaa. Tästä seuraa, että $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$. Siten $\bar{v} = \bar{0}$. Näin ollen ytimessä ei voi olla muita vektoreita kuin nollavektori. Toisaalta tiedetään, että nollavektori on aina lineaarikuvauksen ytimessä. Siten $\operatorname{Ker} L = \{nv\}$ eli kuvaus on injektio. Vaihtoehtoisesti kuvauksen voi osoittaa injektioksi suoraan injektion määritelmän avulla.

Tutkitaan sitten kuvauksen kuvaa $\operatorname{Im} L$. Vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ virittävät avaruuden V laskuharjoitustehtävän nojalla tiedetään, että

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n)).$$

Toisaalta $\operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n)) = W$, sillä $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ on avaruuden W kanta. Siten $\operatorname{Im} L = W$ eli L on surjektio. Vaihtoehtoisesti kuvauksen voi osoittaa surjektioksi suoraan surjektion määritelmän avulla.

Koska L on bijektiivinen lineaarikuvaus, se on isomorfismi.

Ratkaisussa voi myös osoittaa vain pelkän injektiivisyyden tai surjektiivisuuden ja vedota sen jälkeen dimensiolauseeseen. Tehtävässä ei voi käyttää hyväksi kurssimateriaalin tulosta, jonka mukaan äärellisulotteisten avaruuksien välinen lineaarikuvaus on injektio, jos ja vain jos se on surjektio, sillä kyseisen tuloksen todistus käyttää hyväkseen tätä koetehtävää.

Arviointiperusteet

24 pistettä

(a) 10 pistettä

- Löydetty ominaisarvo 1. 2p
- Perusteltu, miksi 1 on omianaisarvo. 3p
- Löydetty ominaisarvo -1. 2p
- Perusteltu, miksi -1 on omianaisarvo. 3p

(b) 14 pistettä

- Osoitettu, että kuvaus on injektio. Tarkempi pisteytys alla. 8p
- Osoitettu, että kuvaus on surjektio. Tarkempi pisteytys alla. 6p
- Injektiivisyyttä tutkittaessa yhden pisteen saa seuraavista asioista: Tutkittu mielivaltaista ytimen alkiota. Kirjoitettu alkio kantavektorien lineaarikombinaationa. Käytetty lineaarisuutta. Käytetty tietoa siitä, että kantavektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Päätelty, että tutkittava vektori on nollavektori. Päätelty, että ytimessä ei voi olla muita vektoreita kuin nollavektori. Todettu, että ydin koostuu pelkästä nollavektorista. Todettu, että kuvaus on tämän perusteella injektio.
- Surjektiivisuutta tutkittaessa pisteitä saa seuraavasti: Käytetty hyväksi sitä, että lähtöavaruuden kantavektorit virittävät lähtöavaruuden (1p). Osoitettu/todettu, että kuvajoukon virittävät lähtöjoukon kantavektorien kuvavektorit (3p). Käytetty hyväksi sitä, että maaliavaruuden kantavektorit virittävät maaliavaruuden (1p). Todettu, että koska $\operatorname{Im} L = W$, kuvaus on sujektio (1p).