Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

7.10.2016

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Ensi viikon tiistaina 11.10. on luento klo 8.30-10.00.
- Ensi viikon perjantaina 14.10. ei ole luentoa.
- Olitte osanneet nelosviikon tähtitehtävän hyvin! Ratkaisut oli myös kirjoitettu hyvällä matemaattisella tyylillä.

Kiellettyjä:

- ”Olet väärässä”
- ”En osaa”
- ”Sinä varmasti tiedät paremmin”

Voit käyttää esimerkiksi näitä:

- ”Minulla on toinen idea”
- ”Minulla on eriävä näkemys”
- ”En ymmärtänyt kysymystä. Ymmärsitkö sinä?”
- ”En tiedä, mitä tämä käsite tarkoittaa. Katsotaan luentomateriaalista sen määritelmä.”
- ”En aivan ymmärtänyt. Selitä uudestaan”

Yhtälöryhmää vastaava matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1215 \\ 3 & -1 & 2 & -610 \\ 1 & -4 & 0 & 204 \end{array}\right].$$

Halutaan selvittää (ilman tietokonetta), kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Miten sen voisi tehdä? Yritä keksiä mahdollisimman helppo strategia!

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(a) Matriisi A on kääntyvä.

(b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

(d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

(e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

(f) Matriisi A ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

(g) Matriisin A determinantti ei ole nolla.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(a) Matriisi A on kääntyvä.

(b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

(d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

(e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

(f) Matriisi A ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

(g) Matriisin A determinantti ei ole nolla.

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on **vapaa**, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos } c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \text{ joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

Mitä seuraava kuva esittää?

Mitkä seuraavista olisivat kelvollisia vapauden määritelmäksi loogisen sisältönsä puolesta?

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee:

(a) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

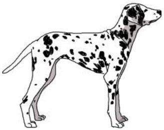
(b) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ ja $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

(c) Jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

(d) Yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

(e) Nollavektori voidaan kirjoittaa vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Määritelmä

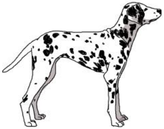


Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos } c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \text{ joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

Vapaus



Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Tutkittaessa, onko eräs vektorijono vapaa, päädyttiin eri tapauksissa seuraaviin matriiseihin:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Missä tapauksissa vektorijono on vapaa?