Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 1
13.9.2016

1. a) Jos $z, w \in \mathbb{C}$, näytä että $\overline{zw} = \bar{z}\,\overline{w}$.
b) Laske kompleksiluvun $(2-i)(4+3i)^{-3}$ reaali- ja imaginääriosat.

Ratkaisu: a: Olkoon $z = a_1 + ib_1$ ja $w = a_2 + ib_2$. Lasketaan suoraan,

$$\bar{z}\bar{w} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1a_2 - ia_1b_2 - ia_2b_1 - b_1 \cdot b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$$
$$= \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} = \overline{zw}.$$

b: Sievennetään kyseistä kompleksilukua muotoon josta reaali- ja imaginääriosat on helppo lukea

$$(2-i)(4+3i)^{-3} = \frac{2-i}{-44+117i} = \frac{(2-i)(-44-117i)}{44^2+117^2} = \frac{-205-190i}{44^2+117^2},$$

mistä nähdään, että reaaliosa on $\frac{-205}{44^2+117^2}$ ja imaginääriosa on $\frac{-190}{44^2+117^2}$.

2. Laske luvun $z = \frac{3-3i}{-1-\sqrt{3}\,i}$ argumentti sekä määrää z:n käänteisluvun imaginääriosa.

Ratkaisu: Argumentin määritelmän nojalla kompleksiluvun $z = x + iy \neq 0$ argumentti on kulma ϕ siten, että $\cos(\phi) = \frac{x}{|z|}$ ja $\sin(\phi) = \frac{y}{|z|}$. Tätä käyttäen lasketaan ensin termin $3 - 3i$ argumentti, jonka voi tarkistaa olevan $\frac{7\pi}{4}$ kun haara rajoitetaan välille $[0, 2\pi)$. Vastaavasti termin $-1-\sqrt{3}\,i$ argumentiksi saadaan $\frac{8\pi}{6}$.

Nyt luvun $z = \frac{3-3i}{-1-\sqrt{3}\,i}$ argumentti saadaan vähentämällä termien argumentit toisistaan argumentin laskusääntöjen mukaisesti, jolloin argumentiksi saadaan

$$\frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}.$$

Luvun z käänteisluku on

$$\frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{3-3i} = \frac{(-1-\sqrt{3}\,i)(3+3i)}{18} = \frac{3(\sqrt{3}-1) - 3i(\sqrt{3}+1)}{18},$$

josta nähdään, että imaginääriosa on $\frac{-\sqrt{3}-1}{6}$.

3. Määrää $\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{11}$.

Ratkaisu: Lasketaan suoraan,

$$\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{11} = \left(\frac{(1+i)(-1-i)}{2}\right)^{11} = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{11} = (-i)^{11} = i.$$

4. Laske luvusta $z = (\sqrt{3}-i)^5$ moduli (eli itseisarvo) sekä argumentti (eli vaihekulma), ja etsi sen napaesitys.

Ratkaisu: Lasketaan ensin luvun $\sqrt{3}-i$ moduli ja argumentti. Moduli saadaan käyttämällä pythagoraan lausetta, ja se on $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$. Argumentti on, määritelmän mukaisesti, se kulma jolle pätee $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\sin(\phi) = \frac{-1}{2}$. Tästä suoraan laskemalla saadaan, että argumentti on $\dfrac{11\pi}{6}$. Korostetaan tässä, että geometrisesti argumentti on kulma positiivisen kiertokulman suhteen. Joten vaikka kolmion kulma origossa on suuruudeltaan $\frac{\pi}{6}$, niin argumentti on $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Vaihtoehtoisesti voidaan myös sanoa, että argumentti on $-\frac{\pi}{6}$.

Lasketaan nyt suoraan napaesitystä käyttäen, että

$$(\sqrt{3}-i)^5 = (2e^{\frac{i11\pi}{6}})^5 = 2^5 e^{\frac{i55\pi}{6}} = 32e^{\frac{i7\pi}{6}},$$

joten moduli on 32 ja argumentti $\dfrac{7\pi}{6}$.

5. Minkä geometrisen tasojoukon muodostavat ne pisteet $z \in \mathbb{C}$ joille

   a) $|z-a| = R, \quad a \in \mathbb{C},\ R > 0$ b) $\mathrm{Re}\, z = 2016$

   c) $\mathrm{Re}\,(e^{i\phi}z) = 0 \quad (\phi \in \mathbb{R}$ vakio) d) $\mathrm{Im}\, z > 2$ e) $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

Ratkaisu: a: Kyseessä ovat ne pisteet z jotka ovat etäisyydellä R pisteestä

a. Siis kyseiseksi joukoksi saadaan R- säteisen, a keskisen ympyrän reuna.

b: Ne pisteet joiden reaaliosa on 2016 muodostavat joukon $(2016, ai), a \in \mathbb{R}$, eli imaginääriakselin suuntaisen suoran joka kulkee pisteen $(2016, 0)$ kautta.

c: Kyseessä ovat ne pisteet jotka kuvautuvat kierrolla $e^{i\phi}$ imaginääriakselille. Koska imaginääriakselin alkukuva mielivaltaisessa kierrossa on jokin origon kautta kulkeva suora, joukon määrittelemistä varten riittää löytää jokin piste origon lisäksi joka kuvautuu imaginääriakselille. Selvästi piste $e^{i(-\phi+\pi/2)}$ kuvautuu pisteelle i, joten joukoksi saadaan origon ja pisteen $e^{i(-\phi+\pi/2)}$ kautta kulkeva suora.

d: Kyseessä ovat ne pisteet joiden imaginääriosa on suurempi kuin 2, joten saadaan avoin ylempi puolitaso joka rajoittuu suoraan joka kulkee pisteiden $(0, 2i), (1, 2i)$ kautta.

e: $\frac{1}{z} = 1 \leftrightarrow 1 = z\bar{z} \leftrightarrow 1 =\mid z \mid^2$, joten saadaan ne pisteet joiden moduli on yksi, siis yksikköympyrän reuna.

6. Esitä $\sin^3 \theta$ funktioiden $\sin(\theta)$ ja $\sin(3\theta)$ avulla, esimerkiksi de Moivre'n kaavoja käyttäen.

Ratkaisu: De Moivre'n nojalla pätee

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta).$$

Toisaalta voidaan laskea suoraan

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3i \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - i \sin^3(\theta).$$

Kompleksiluvut ovat samat jos ja vain jos niiden reaali- ja imaginääriosat ovat samat, joten saadaan yhtälö

$$3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta) = \sin(3\theta),$$

johon voidaan sijoittaa $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ ja sieventää

$$3 \sin(\theta) - 3 \sin^3(\theta) - \sin^3(\theta) = \sin(3\theta),$$

josta saadaan

$$\sin^3(\theta) = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(3\theta).$$