Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 9
22.11.2016

1. Laske integraali $\int_{\partial D(0,r)} \frac{\sin z}{(z-2)e^z}\, dz$, kun a) $r = 1$ ja b) $r = 3$.

Ratkaisu

a: Nyt huomataan, että funktio $\frac{\sin z}{(z-2)e^z}$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{2\}$, joten erityisesti se on analyyttinen kiekossa $B(0, \frac{3}{2})$. Tällöin integraali yli umpinaisen paloittain C^1-polun kiekossa $B(0, \frac{3}{2})$ antaa aina arvon nolla, joten

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{\sin z}{(z-2)e^z}\, dz = 0.$$

b: Nyt funktio $\frac{\sin z}{(z-2)e^z}$ ei ole analyyttinen kuulassa $B(0, 3)$, mutta funktio $f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z}$ on, joten käytetään Cauchyn integraalikaavaa. Tällöin

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{\sin z}{(z-2)e^z}\, dz,$$

mistä saadaan

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{\sin z}{(z-2)e^z}\, dz = 2\pi i \frac{\sin(2)}{e^2}$$

2. Olkoon A alue ja $f : A \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Jos kiekko $\overline{D(z_0, R)} \subset A$, näytä että

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + R\, e^{2\pi i t})\, dt.$$

Kyseessä on *Gaussin keskiarvolause*, so. analyyttiselle funktiolle $f(z_0)$ on keskiarvo funktion arvoista ympyrällä $|z - z_0| = R$.
[Vihje: Sovella Cauchyn integraalikaavaa.]

Ratkaisu

Vihjeen mukaisesti käytetään Cauchyn lausetta. Koska $\overline{D(z_0, R)} \subset A$ ja f analyyttinen alueessa A pätee Cauchyn lauseen nojalla

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz,$$

missä $\gamma(t) = z_0 + Re^{2i\pi t}$, $t \in (0, 1)$. Nyt käyräintegraalin määritelmän nojalla

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + Re^{2i\pi t})}{z_0 + Re^{2i\pi t} - z_0} R 2\pi i e^{2i\pi t} \, dt = \int_0^1 f(z_0 + Re^{2i\pi t}) \, dt,$$

joten Gaussin keskiarvolause on todistettu.

3. Laske integraali

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{2(\sin z + \cos z)}{z^2 - 4} dz.$$

[Vihje: Käytä Cauchyn kaavaa ja hajota integroitava sopiviksi summiksi. Kiekon reuna kierretään positiiviseen suuntaan.]

Ratkaisu

Vihjeen mukaisesti tulee hajoittaa lauseke sopiviksi summiksi ja käyttää tämän jälkeen Cauchyn integraalikaavaa. Huomataan ensin, että

$$\frac{1}{z^2 - 4} = \frac{1}{4} \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z + 2}.$$

Nyt saadaan siis

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{2(\sin z + \cos z)}{z^2 - 4} dz = \int_{\partial D(0,3)} \frac{\frac{1}{2}(\sin z + \cos z)}{z - 2} dz - \int_{\partial D(0,3)} \frac{\frac{1}{2}(\sin z + \cos z)}{z + 2} \, dz.$$

Nyt molempiin integraaleihin voidaan erikseen käyttää Cauchyn integraalikaavaa funktiolla $g(z) = \frac{1}{2}(\sin z \cos z)$ ja saadaan

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{\frac{1}{2}(\sin z + \cos z)}{z - 2} dz = 2\pi i \frac{1}{2}(\sin 2 + \cos 2),$$

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{\frac{1}{2}(\sin z + \cos z)}{z + 2} dz = 2\pi i \frac{1}{2}(\sin(-2) + \cos(-2)).$$

Tällöin

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{2(\sin z + \cos z)}{z^2 - 4} dz = \pi i(\sin 2 + \cos 2) - \pi i(\sin(-2) + \cos(-2)) = 2\pi i \sin 2,$$

sillä $\cos 2 = \cos(-2)$ ja $\sin 2 = -\sin(-2)$.

4. Määrää integraali

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)^3}\, dz,$$

kun $\gamma(t) = 1 + e^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

Ratkaisu

Huomataan ensin

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)^3}\, dz = \int_\gamma \frac{1}{(z+1)^3(z-1)^3}\, dz.$$

Valitaan nyt

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^3},$$

joka on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, ja käytetään Cauchyn kaavan differentiaalimuotoa, ks huomautus 8.14. (Tähän mennessä todistettu vain tapaus 8.13, jossa pisteeksi z_0 valitaan kuulan keskipiste, joka tulee myös pätemään tässä tehtävässä). Cauchyn kaavan tätä muotoa käyttäen saadaan

$$f^{(2)}(1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z+1)^3(z-1)^3}\, dz.$$

Laskemalla suoraan $f^{(2)}(1) = \frac{3}{8}$ ja sieventämällä saadaan

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)^3(z-1)^3}\, dz = \frac{3\pi i}{8}.$$

5. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ alue ja $z_0 \in A$. Oletetaan, että funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, sekä että f on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z_0\}$. Osoita, että silloin f on analyyttinen koko alueessa A.
(Toisin sanoen, jatkuvuuspiste z_0 on *poistuva singulariteetti* analyyttiselle funktiolle f.)

[Vihje: Kombinoi sopivia luentojen lauseita.]

Ratkaisu

Koska $z_0 \in A$ on olemassaa kuula $B(z_0, r) \subset A$. Lauseen 8.4 nojalla jokaiselle umpinaiselle kuulan paloittain C^1 käyrälle pätee, että integraali sen yli on nolla. Tällöin Moreran lauseen (seuraus 8.17) nojalla f on analyyttinen kulassa $B(z_0, r)$, eli erityisesti analyyttinen pisteessä z_0. Tämä todistaa väitteen.