Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 9
22.11.2016

1. Laske integraali $\int_{\partial D(0,r)} \frac{\sin z}{(z-2)e^z}\, dz$, kun a) $r = 1$ ja b) $r = 3$.

2. Olkoon A alue ja $f : A \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Jos kiekko $\overline{D(z_0, R)} \subset A$, näytä että

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + R\, e^{2\pi i t})\, dt.$$

Kyseessä on *Gaussin keskiarvolause*, so. analyyttiselle funktiolle $f(z_0)$ on keskiarvo funktion arvoista ympyrällä $|z - z_0| = R$.
[Vihje: Sovella Cauchyn integraalikaavaa.]

3. Laske integraali

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{2(\sin z + \cos z)}{z^2 - 4} dz.$$

[Vihje: Käytä Cauchyn kaavaa ja hajota integroitava sopiviksi summiksi. Kiekon reuna kierretään positiiviseen suuntaan.]

4. Määrää integraali

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)^3}\, dz,$$

kun $\gamma(t) = 1 + e^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ alue ja $z_0 \in A$. Oletetaan, että funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, sekä että f on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z_0\}$. Osoita, että silloin f on analyyttinen koko alueessa A.
(Toisin sanoen, jatkuvuuspiste z_0 on *poistuva singulariteetti* analyyttiselle funktiolle f.)

[Vihje: Kombinoi sopivia luentojen lauseita.]

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 9
22.11.2016

1. Determine the integral $\int_{\partial D(0,r)} \frac{\sin z}{(z-2)e^z}\, dz$, when a) $r = 1$ and b) $r = 3$.

2. Suppose A is a domain and $f : A \to \mathbb{C}$ analytic. If $\overline{D(z_0, R)} \subset A$, show that

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + R\, e^{2\pi i t})\, dt.$$

This is the *Gauss mean-value theorem*, i.e. for an analytic function, $f(z_0)$ is the average of the values of the function on the circle $|z - z_0| = R$.
[Hint: Use the Cauchy integral formula.]

3. Determine the integral

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{2(\sin z + \cos z)}{z^2 - 4} dz.$$

[Hint: Use the Cauchy formula and decompose the integrand to suitable sums. The boundary of the disk has the positive direction.]

4. Determine the integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)^3}\, dz,$$

when $\gamma(t) = 1 + e^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

5. Suppose $A \subset \mathbb{C}$ is a domain and $z_0 \in A$. We assume that the function $f : A \to \mathbb{C}$ is continuous, and that f is analytic in the domain $A \setminus \{z_0\}$. Show that then f is analytic in the whole domain A.
(That is, a point of continuity z_0 is a *removable singularity* for an analyytic function f.)

[Hint: Combine suitable results from the lectures.]